

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ (ΟΜΑΔΑ Β)**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1, A2, A3** Θεωρία σχολικού βιβλίου

**A4** α – Σ      β – Σ      γ – Λ      δ – Λ      ε – Λ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1**

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) + (z+1)(\bar{z}+1) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 \Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

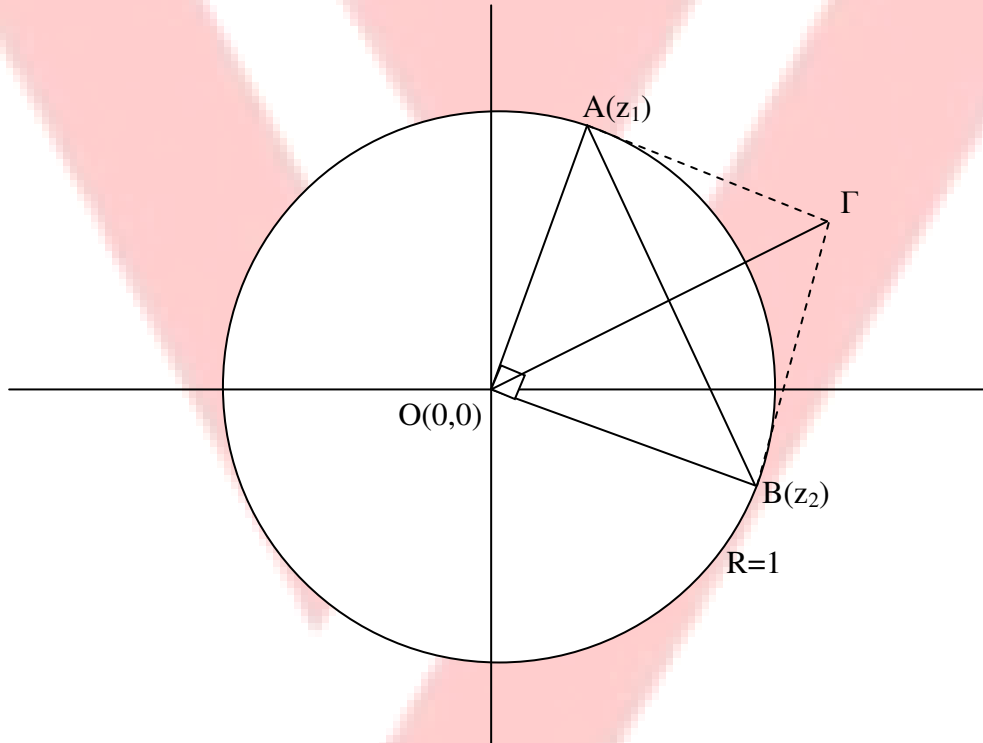
Ο z κινείται σε κύκλο με κέντρο O(0, 0) και R = 1

**B2**

Ο  $\hat{A}B$  = ορθογώνιο

$$AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$$

$$|z_1 - z_2| = (BA) = (O\Gamma) = |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$



**B3**

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \Leftrightarrow (w - 5\bar{w})(\bar{w} - 5w) = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w\bar{w} - 5w^2 - 5\bar{w}^2 + 25w\bar{w} = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(w^2 + \bar{w}^2) + 26w\bar{w} = 144 \Leftrightarrow -5[(w + \bar{w})^2 - 2w\bar{w}] + 26w\bar{w} = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(w + \bar{w})^2 + 36w\bar{w} = 144 \xrightarrow{w=x+yi}$$

$$-5(2x)^2 + 36(x^2 + y^2) = 144 \Leftrightarrow -20x^2 + 36x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = \sqrt{5}$$

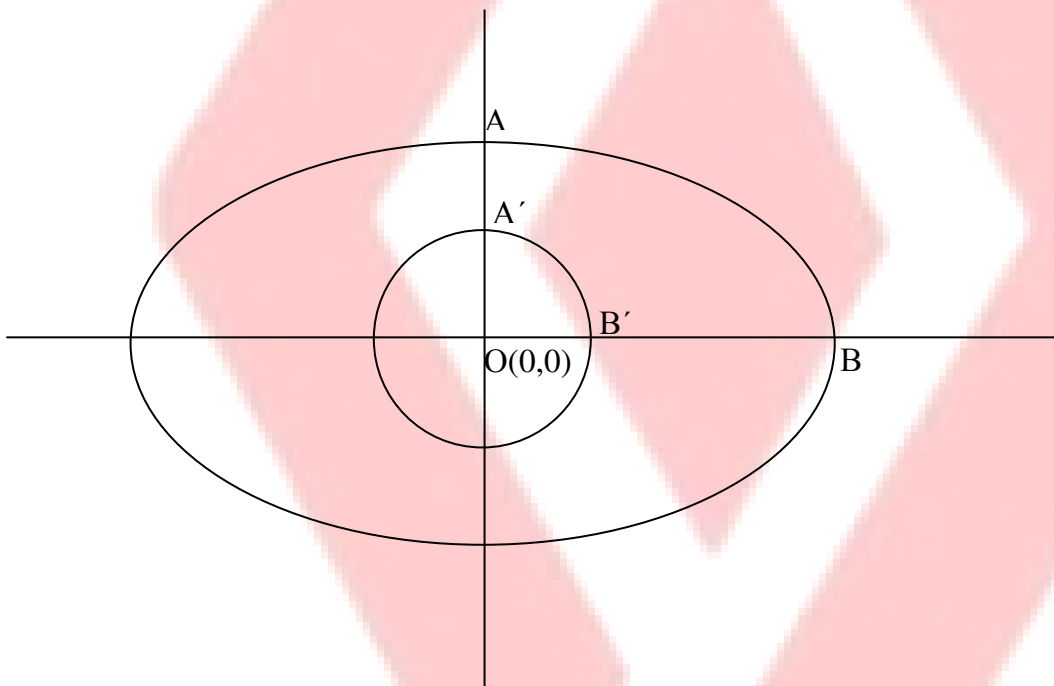
**B4**

$$c: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = \sqrt{5}$$

$$|z - w|_{\min} = (AA') = \beta - R = 2 - 1 = 1$$

$$|z - w|_{\max} = (BB') = \alpha + R = 3 + 1 = 4$$

**ΘΕΜΑ Γ****Γ1.**

$$f'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-1(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

παρατηρώ ότι  $f'(1) = 0$  άρα  $x_0 = 1$  κρίσιμο σημείο

Άρα για κάθε  $0 < x < 1$  έχουμε  $f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$  δηλ  $f \downarrow$  στο  $(0, 1]$ .

**ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ:** • Φλέμιγκ 40, τηλ. 2109932291 • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

**ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ:** • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396, • Πρωτόπαππα & Ρόδου 2, τηλ. 2109955210

email : [info@romvos.edu.gr](mailto:info@romvos.edu.gr)

για κάθε  $x > 1$  έχουμε  $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$  δηλ  $f \uparrow$  στο  $[1, +\infty)$

Θα βρώ τα όρια στο  $x_0 = 0^+$  και στο  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)\ln x - 1] = +\infty$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'			○	
f		$+\infty$	-1	$+\infty$

O.E.

OE  $f(1) = -1$

$\Sigma T_f = [-1, +\infty)$

**Γ2.**

$$x^{x-1} = e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = 2013$$

$$(x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - 1 = 2012$$

$$f(x) = 2012$$

Παρατηρώ ότι η f παίρνει την τιμή 2012 στο διάστημα (0,1) διότι έχει  $\Sigma T = (-1, +\infty)$  και στο  $[1, +\infty)$  διότι έχει  $\Sigma T = [-1, +\infty)$

**Γ3.**

$$f(x_1) = f(x_2) = 2012 \text{ με } x_1 < x_2$$

$$h(x) = e^x f(x) - 2012 \cdot e^x \text{ με } h'(x) = e^x [f(x) + f'(x)] - 2012 \cdot e^x$$

- h συναρτ. στο  $[x_1, x_2]$
- h παραγ. στο  $(x_1, x_2)$
- $h(x_1) = e^{x_1} f(x_1) - 2012 \cdot e^{x_1} = 0$
- $h(x_2) = e^{x_2} f(x_2) - 2012 \cdot e^{x_2} = 0$

Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle και άρα υπάρχει

$$x_0 \in (x_1, x_2) : h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} [f'(x_0) + f(x_0)] - e^{x_0} \cdot 2012 \Rightarrow$$

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

**Γ4.**

$$g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$E = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$$

Όμως  $(x-1) \ln x \geq 0$  για κάθε  $x \in [1, e]$

$$\text{Άρα } E = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx = \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{x}{2} - 1 \right) \, dx$$

$$= \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \left[ \frac{1}{4} x^2 - x \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{4} e^2 + e + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ. μ.}$$

### ΘΕΜΑ Δ

#### Δ1 Θεωρώ

$$h(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) \, dt + \frac{x^2-x}{e}, \quad \mu\epsilon \quad x > 0$$

$$h'(x) = f(x^2-x+1)(2x-1) + \frac{2x-1}{e}, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Παρατηρώ ότι  $h(1) = 0$

Άρα ισχύει  $h(x) \geq h(1)$  για κάθε  $x > 0$

Άρα η  $h$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0=1$  και επειδή το 1 είναι εσωτερικό σημείο η  $h$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0=1$  και είναι παραγωγίσιμη από το Θ. Fermat

$$h'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$$

- $f$  συνεχής στο  $(0, +\infty)$
- $f(x) \neq 0$
- $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$

Άρα  $f(x) < 0$  για κάθε  $x > 0$

$$\text{Τότε } \ln x - x = \left( \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} \, dt + e \right) f(x)$$

Θεωρώ  $P(x) = \ln x - x, \quad x > 0$

$$P'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$P'$			+	-
$P$			○	
			↗	↘

Ολικό μέγιστο:  $P(1) = -1$

Άρα  $P(x) \leq -1 < 0$  για κάθε  $x > 0$

$$\text{Άρα } \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \neq 0$$

$$\text{Άρα } \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e} = f(x)$$

Άρα η  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Τότε  $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$  παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\left( \frac{\ln x - x}{f(x)} \right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

$$\text{Άρα } \frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{c \cdot e^x}$$

$$f(1) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow -\frac{1}{c \cdot e} = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Δηλαδή } f(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} (\ln x - x)$$

**Δ2**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1) \ln x) = -\infty$$

$$\text{Θεωρώ } P(x) = f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)$$

$$\text{Θέτω } u = \frac{1}{f(x)} \text{ όταν } f(x) \rightarrow -\infty, u \rightarrow 0^-$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] \stackrel{u = \frac{1}{f(x)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+ \text{ τότε } u \rightarrow 0^-} \left( \frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{DHL}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \stackrel{DHL}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{-\eta\mu u}{2} = 0$$

**Δ3**

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x) = e^{-x} (\ln x - x) < 0, \text{ F φθίνουσα}$$

$$F''(x) = -e^{-x} (\ln x - x) + e^{-x} \left( \frac{1}{x} - 1 \right) = e^{-x} \left( -\ln x + x + \frac{1}{x} - 1 \right) > 0 \text{ άρα F κυρτή}$$

- F συνεχής στο  $[x, 2x], [2x, 3x]$
- F παραγωγίσιμη στο  $(x, 2x), (2x, 3x)$

Άρα εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα  $[x, 2x], [2x, 3x]$  και άρα υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (x, 2x), (2x, 3x)$  αντίστοιχα έτσι ώστε:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{3x - 2x} = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

$$\text{Όμως } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{F'} F'(\xi_1) < F'(\xi_2)$$

$$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow 2F(2x) < F(x) + F(3x)$$

**Δ4.**

$$h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$$

h συνεχής στο  $[\beta, 2\beta]$

$$h(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$$

$$\text{Όμως } \beta < 3\beta \xrightarrow{F\downarrow} F(\beta) > F(3\beta) \Rightarrow h(\beta) > 0$$

Άρα  $h(\beta) > 0$ .

$$h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(3\beta) - F(\beta) < 0$$

άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano και υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (\beta, 2\beta) : h(\xi) = 0 \Rightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Επειδή  $h'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$  για κάθε  $x > 0$  τότε η h είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή 1 – 1 άρα η ρίζα  $x = \xi$  είναι μοναδική.

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ**  
**ΑΝΤΩΝΙΑΔΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ**  
**ΔΡΙΜΙΛΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ**  
**ΞΗΝΤΑΒΕΛΩΝΗΣ ΠΕΤΡΟΣ**  
**ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ**  
**ΤΣΑΡΠΑΛΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ**  
**ΤΣΟΓΙΑΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ**