ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=\left(F(x)+c\right)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α2.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Α3.

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4.

α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Για το $D_{f\circ g}$ πρέπει: $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

άρα $D_{f\circ g} = [0,1]$

$$(fog)(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,\ x \in [0,1]$$

Β2. Για $x \in (0,1)$ είναι:

$h'(x) = 2(x-1) < 0$ και h συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα και 1 – 1, οπότε αντιστρέφεται.

$$A = [0,1] \xrightarrow{h \searrow} h(A) = \left[h(1), h(0)\right] = [0,1]$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$$

Άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x},\ x \in [0,1]$

Β3. (i) Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων .

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \text{ και } \varphi(1) = \frac{1}{2}$$

Οπότε η φ είναι συνεχής και στο 1 άρα είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης είναι $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ άρα $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ άρα για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$.

(ii) Η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$$

Άρα ισχύει $\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$ και η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$ τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για $x<-1$ έχουμε $f'(x)=-2$ άρα $f(x)=-2x+C_1$

Για $x>-1$ έχουμε $f'(x)=3x^2-1$ άρα $f(x)=x^3-x+C_2$

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ έχουμε

Για $x>-1 \quad f(0)=0 \Leftrightarrow C_2=0$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε θα είναι συνεχής και στο $x=-1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ άρα $2+C_1=0 \Leftrightarrow C_1=-2$

Άρα $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & , \quad x\le -1 \\ x^3-x & , \quad x>-1 \end{cases}$

Γ2.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$

Είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(x-x_0)$ η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $(0,-2)$ άρα

για $y=-2$ και $x=0$ έχουμε

$$-2-x_0^3+x_0=-3x_0^3+x_0$$

$$2x_0^3=2 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$$

Και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y-0=2(x-1) \Leftrightarrow y=2x-2$

Γ3.

Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο , επειδή $K(x,0)$

Και $x>2$ τότε $(K\Gamma)=x-2$ και $(MK)=2x-2$

$$E=\frac{1}{2}(x-2)(2x-2)=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$$

Άρα $E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$ και $E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)=x'(t)(2x(t)-3)$

Για $t=t_0$ έχουμε $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$

Άρα $E'(t_0)=2\cdot 3=6$ τετραγ.μον / sec

Γ4.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty \quad \text{άρα} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$|\eta\mu f(x)|\le 1$ πολλαπλασιάζω με $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ τότε

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right|=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1+(-x)^3}\underset{x\to-\infty\ u\to+\infty}{\overset{u=-x}{=\!=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^3+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{u^3+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=1$$

Δ1.

i. Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Με $f'(x)=1-\frac{1}{3x}\cdot 3=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$

$f'(x)<0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ x-1<0\Leftrightarrow x<1$ στο $(0,1)$.Άρα $f'(x)<0$

x	0	1	+∞
f ΄(x)	–	0	+
f(x)	↘		↗

Η f συνεχής και ↘ στο $\Delta_1=(0,1]$ τότε $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[1-\ln3,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$

Η f συνεχής και ↗ στο $\Delta_2=[1,+\infty)$

$f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1-\ln3,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln3x}{x}\right)\right]=+\infty$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3x}{x} \overset{DLH}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

Το $0 \in f(\Delta_1)$ και η $f \searrow$ στο Δ_1 άρα έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0,1)$

Το $0 \in f(\Delta_2)$ και η $f \nearrow$ στο Δ_2, άρα έχει μοναδική ρίζα $x_2 \in (1,+\infty)$.

Άρα υπάρχουν δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 της $f(x)=0$ ώστε $x_1<1<x_2$.

ii. Η f' παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$. Άρα η f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2.

Θέλω $E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$

Αν $x\in(x_1,1]$ η f γνησίως φθίνουσα : $x>x_1 \Leftrightarrow f(x)<f(x_1)=0$

Αν $x\in[1,x_2)$ η f γνησίως αύξουσα : $x<x_2 \Leftrightarrow f(x)<f(x_2)=0$

Τελικά για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ έχουμε $f(x)<0$

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx=\int_{x_1}^{x_2}(-f(x))dx=\int_{x_1}^{x_2}(-x+\ln(3x))dx=\int_{x_1}^{x_2}-x\,dx+\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln 3x\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}+\left[x\ln 3x\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x(\ln 3x)'dx=-\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right)+x_2\ln 3x_2-x_1\ln 3x_1-\int_{x}^{x_2}x\frac{3}{3x}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+(x_2^2-x_1^2)-(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$$

Διότι από το Δ1

$f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1-\ln 3x_1=0$

$\Leftrightarrow x_1=\ln 3x_1$

$f(x_2)=0 \Leftrightarrow x_2-\ln 3x_2=0$

$\Leftrightarrow x_2=\ln 3x_2$

Δ3.

Δείξαμε ότι $E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$

Όμως $E>0$ και γνωρίζουμε ότι $x_2>x_1$ άρα $x_2-x_1>0$

Τότε πρέπει $x_1+x_2-2>0 \Leftrightarrow x_2>2-x_1$

$x_2, 2-x_1 \in (1,+\infty)$ και f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα $f(x_2) > f(2-x_1) \Leftrightarrow 0 > f(2-x_1)$

Δ4.

$$2f(x)+\ln 3 = 1+f'(x_2)\cdot(x-x_2)$$

$$(f(x)+\ln 3-1)+(f(x)-f'(x_2)\cdot(x-x_2))=0$$

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$

Άρα $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$

Οπότε $f(x)\geq 1-\ln 3 \Leftrightarrow$

$f(x)+\ln 3-1\geq 0 \qquad (2)$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$

- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_2, f(x_2))$ είναι

$(\varepsilon): y-f(x_2)=f'(x_2)\cdot(x-x_2)$

$y-0=f'(x_2)\cdot(x-x_2)$

$y=f'(x_2)\cdot(x-x_2)$

Όμως η f κυρτή στο $(0,+\infty)$. Άρα ισχύει $f(x)\geq y \Leftrightarrow f(x)\geq f'(x_2)\cdot(x-x_2)$

$f(x)-f'(x_2)\cdot(x-x_2)\geq 0 \qquad (3)$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $(2),(3)$:

$(f(x)+\ln 3-1)+(f(x)-f'(x_2)\cdot(x-x_2))\geq 0$ για κάθε $x>0$

Δεν υπάρχει τιμή του $x\in(0,+\infty)$ ώστε να ισχύει η ισότητα.

Άρα $(f(x)+\ln 3-1)+(f(x)-f'(x_2)\cdot(x-x_2))>0$ για κάθε $x>0$.

<u>Σχολιασμός θεμάτων</u>

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και κάλυπταν όλο το εύρος της ύλης .Ήταν πιο απαιτητικά από πέρυσι, αλλά ήταν σαφή, χωρίς γρίφους και παγίδες.

Συγγραφική επιμέλεια

Ομάδα μαθηματικών Ρόμβου