ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη θεωρήματος σελίδα 186 σχολικού βιβλίου

Α2. Θεώρημα σελίδα 76 σχολικού βιβλίου

Α3. Ορισμός σελίδα 161 σχολικού βιβλίου

Α4. Α-Σωστό, Β-Σωστό, Γ-Λάθος, Δ-Λάθος, Ε- Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ άρα από Θεώρημα Fermat $f'(1) = 0$.

Έχουμε $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$, επομένως προκύπτει ότι

$3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Επομένως η συνάρτηση είναι $f(x) = x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

Β2. Για $\alpha = -6$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Θα βρούμε τις ρίζες της παραγώγου και θα κάνουμε τον πίνακα πρόσημων της f' για να εξετάσουμε τη μονοτονία της f.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$

x	$-\infty$ 1	3	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$. Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_1 , άρα $f(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ f(1)\right] = (-\infty, 1]$ γιατί $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $f(1) = 1$.

Το 0 ανήκει στο $f(A_1)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Η f συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)\cdot f(1) < 0$, άρα από Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι το $x_1 \in (0,1)$, δηλαδή είναι θετικό.

Έστω $A_2 = [1, 3]$. Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο A_2, άρα
$f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$. Το 0 ανήκει στο $f(A_2)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$,
άρα θετικό, τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.
Έστω $A_3 = [3, +\infty)$. Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A_3, άρα
$f(A_3) = \left[f(3), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [-3, +\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $f(3) = -3$.
Το 0 ανήκει στο $f(A_3)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_3 \in A_3$, άρα θετικό, τέτοιο ώστε
$f(x_3) = 0$.
Άρα η $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Β3. $f''(x) = 6x - 12$ άρα η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.
Παρουσιάζει σημείο καμπής στο 2 το $f(2) = -1$.

Β4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση
$\varepsilon_1: \ y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$
και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση
$\varepsilon_2: \ y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = \xi + f(\xi) + (1 + f'(\xi))(x - \xi)$
Στην ε_1 για $x = 0$: $y = -f'(\xi)\cdot\xi + f(\xi)$ και
στην ε_2 για $x = 0$: $y = (1 + f'(\xi))\cdot(-\xi) + \xi + f(\xi) = -f'(\xi)\cdot\xi + f(\xi)$
Άρα οι ε_1 και ε_2 τέμνονται πάνω στον y'y στο σημείο $A(0, -f'(\xi)\xi + f(\xi))$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(0) = 0$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(e^x \cdot \eta\mu x) = 1\cdot 0 = 0$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2 + x} = 0$
Άρα η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to0^-} e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x} = e^0\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \overset{D.H.L.}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{2x + 1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty$$

Γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x + 1}{2} = \frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty$, καθώς $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^2 + x} = 0$ και $\sqrt{x^2 + x} > 0$ κοντά στο
$x_0 = 0$.
Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x\cdot ημx}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\dfrac{ημx}{x}=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\cdot ημx=0$ από κριτήριο παρεμβολής.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot ημx=0$ παρομοίως από κριτήριο παρεμβολής.

Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Άρα η $y=x+\dfrac{1}{2}$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Έστω $h(x)=f(x)-x-\dfrac{1}{2}$

Η h συνεχής στο $[-\pi,0]$ και

$h(-\pi)=f(-\pi)+\pi-\dfrac{1}{2}=\pi-\dfrac{1}{2}>0$ και $h(0)=f(0)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$

Από Θεώρημα Bolzano η $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x+\dfrac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα ξ στο $(-\pi,0)$,

άρα η C_f τέμνει την ευθεία $y=x+\dfrac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ξ.

Γ4. $y=\sqrt{x^2+x}$, $x\geq 0$

Για κάθε χρονική στιγμή $t>0$: $y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$

Και $y'(t)=\dfrac{2x(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$

Για $t=t_0$ $\quad y'(t_0)=x'(t_0)>0$

$x'(t_0)\cdot 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=x'(t_0)\cdot\left(2x(t_0)+1\right)\Leftrightarrow$

$4\left(x^2(t_0)+x(t_0)\right)=4x^2(t_0)+4x(t_0)+1\Leftrightarrow 0=1$

Άτοπο, επομένως δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0>0$ ώστε $y'(t_0)=x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

$x f(x) = 2F(x)\ln x, \quad x > 0 \quad \underline{(1)}$

$\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{2F(x)\ln x}{x}, \qquad x > 0$

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)\left(x^{\ln x}\right)'}{\left(x^{\ln x}\right)^2} = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)e^{\ln^2 x}2\ln x\frac{1}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)^2} =$$

$$= \frac{f(x) - F(x)2\ln x\frac{1}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)} = \frac{\frac{2F(x)\ln x}{x} - \frac{2F(x)\ln x}{x}}{x^{\ln x}} = 0$$

Άρα η g σταθερή στο $(0,+\infty)$

Τότε $g(x) = c, \qquad x > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}} = c, \qquad x > 0$

$\Leftrightarrow F(x) = c\,x^{\ln x}, \qquad x > 0$

Δ.2.

i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{2F(x)\ln x}{x}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2F(x)\ln x}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{2F(x)}{x} = \dfrac{2F(1)}{1} = 2$

ii) Η <u>σχέση (1)</u> $xf(x) = 2F(x)\ln x, \qquad x > 0$

γίνεται $\left(xf(x)\right)' = \left(2F(x)\ln x\right)', \qquad x > 0$

$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 2f(x)\ln x + 2F(x)\dfrac{1}{x}$

Για $x = 1$: $f(1) + f'(1) = 2f(1)\ln 1 + 2F(1)$

$\Leftrightarrow f(1) + 2 = 0 + 2F(1)$

$\Leftrightarrow f(1) + 2 = 2F(1)$

Ομοίως για $x = 1$ η σχ.(1) γίνεται

$f(1) = 2F(1)\ln 1$

$\Leftrightarrow f(1) = 0$

άρα $f(1) + 2 = 2F(1)$

$\Leftrightarrow 0 + 2 = 2F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1$ και $F(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0$

Δ.3.

$F'(x) = e^{\ln^2 x} 2\ln x \frac{1}{x} = 2\frac{e^{\ln^2 x}\ln x}{x} \qquad x > 0$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1	$+\infty$
$F'(x)$	‖	-	0	+
$F(x)$	‖	↘		↗
			ο.ε	

Η F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$, το $F(1) = 1$

$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2, \quad x > 0$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0, \quad x > 0$

Ορίζω $h(x) = F(x^2) - F(x) + (x-1)^2, \quad x > 0$

Παρατηρώ $h(1) = F(1) - F(1) + (1-1)^2 = 0$

Άρα το $x = 1$ ρίζα

Για $x > 1$

$\Leftrightarrow x^2 > x$

$F \uparrow$ στο $[1,+\infty)$

Άρα $F(x^2) > F(x)$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow h(x) > 0$

Για $x < 1$ και $x > 0 \Leftrightarrow x^2 < x$

$F \downarrow$ στο $(0, 1]$

Άρα $F(x^2) > F(x)$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

$\Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow h(x) > 0$

Άρα $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Δ.4.

$F(x) \geq F(1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα $E = \int_1^e |F(x)|\,dx = \int_1^e F(x)\,dx = \int_1^e e^{\ln^2 x}dx$

Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$

Αντικαθιστούμε όπου x το e^x

Τότε $\ln e^x \leq e^x - 1$

$\Leftrightarrow x \leq e^x - 1$

$\Leftrightarrow x + 1 \leq e^x$

Παρομοίως αντικαθιστούμε όπου x με $\ln^2 x$ οπότε $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$

Και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x}dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx$

Οπότε $E > \int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx$

$\int_1^e (\ln^2 x + 1)\,dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + \int_1^e 1\,dx =$

$= \left[x \ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e 2x \ln x \frac{1}{x}\,dx + \left[x\right]_1^e =$

$= e\ln^2 e - 1\ln^2 1 - 2\int_1^e \ln x\,dx + (e-1) =$

$= e - 2\int_1^e (x)' \ln x\,dx + e - 1 =$

$= 2e - 1 - 2\left[\left[x\ln x\right]_1^e - \int_1^e 1\,dx\right] =$

$2e - 1 - 2\left(e\ln e - 1\ln 1 - \left[x\right]_1^e\right) =$

$= 2e - 1 - 2(e - 0 - e + 1) = 2e - 1 - 2 = 2e - 3$

Άρα $E > 2e - 3$

Σχολιασμός θεμάτων

Τα φετινά θέματα κινήθηκαν στο πνεύμα των τελευταίων ετών, καλύπτοντας με πληρότητα το εύρος της εξεταστέας ύλης. Η διαβάθμιση της δυσκολίας ήταν σαφώς ορατή, γεγονός που επέτρεπε σε έναν καλά προετοιμασμένο μαθητή να ανταποκριθεί με επάρκεια και να επιτύχει υψηλές επιδόσεις.

Το Θέμα Β παρουσίασε αυξημένες απαιτήσεις σε σχέση με αντίστοιχα θέματα προηγούμενων ετών, γεγονός που ενδέχεται να δυσκόλεψε μέρος των υποψηφίων. Το Θέμα Γ χαρακτηρίζεται ως αναμενόμενο και στο πλαίσιο των συνήθων θεματικών επιλογών της επιτροπής.

Ιδιαίτερη πρόκληση αποτέλεσαν τα ερωτήματα Δ3 (ειδικά όσον αφορά τις 3 μονάδες του τελευταίου σκέλους) και Δ4, τα οποία απαιτούσαν σε βάθος κατανόηση και ευχέρεια στην εφαρμογή των γνώσεων.

Συγγραφή Απαντήσεων:

Ομάδα Μαθηματικών Ρόμβου