**ΡΟΜΒΟΣ**
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
since 1980

**ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Απόδειξη σελίδα 133 σχολικού βιβλίου

**Α2.** Θεώρημα σελίδα 51 σχολικού βιβλίου

**Α3.** Ορισμός σελίδα 185 σχολικού βιβλίου

**Α4.** α - Λάθος

β -Σωστό

γ - Σωστό

δ - Σωστό

ε - Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Προσδιορισμός της $h = f \circ g$

Πεδίο ορισμού της $f \circ g$

$$x \in D_{f\circ g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ \text{και} \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-2}+1>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ \text{και} \\ x>2 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad D_{f\circ g} = (2,+\infty)$$

Τύπος της $f \circ g$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}\right) = \ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = \ln(x-2) \quad \text{για } x>2$$

**Β2.** $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2,+\infty)$

$h'(x) = \dfrac{1}{x-2}(x-2)' = \dfrac{1}{x-2} > 0$ για $x>2$ άρα $h$ γνησίως αύξουσα, επομένως είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Πεδίο ορισμού της αντίστροφης $h^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της h

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα τότε $\Sigma T = \left(\lim\limits_{x\to 2^+} h(x), \lim\limits_{x\to +\infty} h(x)\right)$

• $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow[x\to 2^+, u\to 0^+]{u = x-2} \lim\limits_{u\to 0^+} (\ln u) = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x-2) \xrightarrow[x\to +\infty, u\to +\infty]{u = x-2} \lim\limits_{u\to +\infty} (\ln u) = +\infty$

Άρα $\Sigma T = \Re$

$y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$, $y \in \Re$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$ με $x \in \Re$

**B3.** $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\dfrac{f(x)}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\ln(x-2)\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\right) = -\infty$ διότι έχουμε

$\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow[x\to 2^+, u\to 0^+]{u = x-2} \lim\limits_{u\to 0^+} (\ln u) = -\infty$

και $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2\ln(x-1)}{x-2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.i)** Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l \in R$

Αν $\kappa \neq 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\kappa x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \kappa x$, τότε αν $\kappa > 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ και αν $\kappa < 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Επομένως και οι δύο περιπτώσεις καταλήγουν σε άτοπο

Αν $\kappa = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ii) Επίσης η $y = x$ είναι εφαπτομένη στο $O(0,0)$, επομένως ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

Όπου $f'(x) = \dfrac{(3\kappa x^2 + \mu)(x^2+1) - (\kappa x^3 + \mu x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$, άρα $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$

**Γ2.** i) Γίνεται $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ , $x \in R$

$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ , άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = -1$

| $x$ | $-\infty$    $-1$ | | $1$    $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | 0   +   0 | - |
| $f$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = -1$ , το $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x = 1$ , το $f(1) = \dfrac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ , $\Delta_2 = [-1, 1]$ και $\Delta_3 = [1, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ άρα $f(\Delta_1) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right)$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$ άρα $f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$ , άρα $f(\Delta_3) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$

Οπότε $f(R) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

Ισχύει $a^2 \geq 0$ για κάθε $a \in R$ , τότε $a^2 + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}$ για κάθε $a \in R$

Αν $a \neq 0$ , $a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}$ , άρα η $f(x) = \dfrac{1}{2} + a^2$ είναι αδύνατη

Αν $a = 0$ , $a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ , τότε η $f(x) = \dfrac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$ , καθώς η f παρουσιάζει μέγιστο $x = 1$ , το $f(1) = \dfrac{1}{2}$ .

**Γ3.** $I_\nu = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$

i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$

Ισχύει για $\nu = 0$, $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$

Και για $\nu = 1$ , $I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) + x$ με $x \in [-1, 0]$

• η φ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

• $\varphi(-1) = g(-1) - 1 < 0$ αφού $g(-1) < 1$

$\varphi(0) = g(0) > 0$ Άρα $\varphi(-1)\varphi(0) < 0$

Από Θ.Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0$

Έχουμε $\varphi'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ άρα η $\varphi'$ διατηρεί σταθερό πρόσημο διότι η $\varphi'$ είναι συνεχής και $\varphi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$ άρα η φ είναι γνησίως μονότονη στο $[-1, 0]$ και επομένως η ρίζα $x_1$ είναι μοναδική.

**Δ2.** Θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο $x = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\left(g(x)+x\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[x\left(g(x)+x\right)\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right] = 3 - \kappa$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη αν $x = 0$ έχουμε $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

**Δ3.** i) η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ως πράξεις συνεχών και για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0 \quad \text{για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

ii) Η εξίσωση $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ διότι, όταν $x \to \frac{\pi}{2}^-$ είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ και $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\sigma\upsilon\nu x) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$ , επομένως $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\eta\mu x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right] = +\infty$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει σύνολο τιμών το $\left[f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$

Επειδή $\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty)$ υπάρχει $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και είναι μοναδικό αφού η f στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

**Δ4**. i) Για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x \leq 0$ άρα $x^2 \geq 0$

Θα βρούμε το πρόσημο της $\varphi(x) = g(x) + x$ έχουμε ότι η φ είναι γνησίως μονότονη

$\varphi(0) = g(0) > 0$ και $\varphi(x_1) = 0$. Δηλαδή $x_1 < 0 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(0)$ Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα

Για $x \geq x_1 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0$

Άρα $\varphi(x) = g(x) + x \geq 0$ για $x \in [x_1, 0]$

Άρα $f(x) \geq 0$ για $x \in [x_1, 0]$

ii) Έχουμε $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

$$\Omega_1 = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x) + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1}{4} \quad \sigma\chi(1)$$

$$\Omega_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Τότε $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = x_1^4 - 3\left(\frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}\right)$

Διότι $g(x_1) = -x_1$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$

**Σχολιασμός θεμάτων**

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και κάλυπταν ικανοποιητικά το εύρος της εξεταστέας ύλης, δίνοντας τη δυνατότητα στους υποψηφίους να αξιολογηθούν σε βασικές αλλά και πιο απαιτητικές έννοιες του μαθήματος.
Το Θέμα Β ήταν προσιτό και αναμενόμενο για τους περισσότερους υποψηφίους. Το Θέμα Γ εξέταζε μεγάλο μέρος της ύλης μέσα από συνδυαστικές εφαρμογές, χωρίς ωστόσο να παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες για έναν καλά προετοιμασμένο μαθητή. Το Θέμα Δ, όπως συμβαίνει συνήθως, ήταν το πιο απαιτητικό μέρος του διαγωνίσματος. Ιδιαίτερα το ερώτημα Δ4 απαιτούσε αυξημένη μαθηματική ωριμότητα και προσεκτικούς υπολογισμούς. Συνολικά ήταν ένα καλά δομημένο διαγώνισμα, με αναφορές στο σχολικό βιβλίο, το οποίο επέτρεψε την ουσιαστική αξιολόγηση των γνώσεων και δεξιοτήτων των υποψηφίων.

**Συγγραφή Θεμάτων**

**Βασιλόπουλος Νώντας , Δριμιλής Βασίλης, Πετρολιάγκης Δημήτρης, Σοφός Γεώργιος, Τσαρπαλής Γιάννης, Τσαρπαλή Ειρήνη**