ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

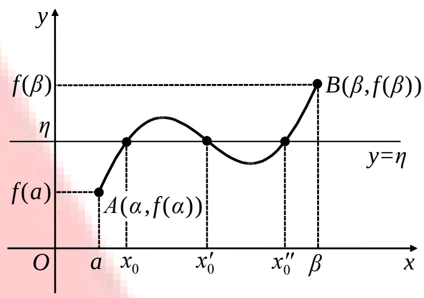
Α1.

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Α2

Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

Α3

α. Ο ισχυρισμός της πρότασης είναι Ψευδής. (Σχολικό βιβλίο Σελ 136)

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η παράγωγος της δεν είναι αναγκαστικά θετική. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$ που δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0)=0$. (Σχολικό βιβλίο Σελ 136)

Α4

α)ΛΑΘΟΣ
β)ΣΩΣΤΟ
γ)ΣΩΣΤΟ
δ)ΣΩΣΤΟ
ε)ΣΩΣΤΟ (ΣΕΛΙΔΑ 177 ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ)

ΘΕΜΑ Β

Β1. $g(x)=e^x$, $A_g=\mathbb{R}$ και $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ $,x>1$ άρα $A_f=(1,+\infty)$

Η $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ορίζεται, αν και μόνο αν, υπάρχουν $x\in\mathbb{R}$ ώστε $x\in Ag$ και $g(x)\in Af$

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>0 \end{cases} =(0,+\infty)$$

Άρα $A_{f\circ g}=(0,+\infty)$

και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Β2.

$$(f\circ g)'(x)=\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-e^x-2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0 \quad ,$$

άρα $f\searrow$ άρα και $1-1$,οπότε αντιστρέφεται

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=+\infty$ αφού , $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+2)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0\,,e^x-1>0$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+2)\dfrac{1}{e^x-1}=3\cdot(+\infty)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=1$

άρα σύνολο τιμών της $f\circ g$ είναι $(1,+\infty)$

Επίσης , $y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2\Leftrightarrow e^x=\dfrac{y+2}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y+2}{y-1},\,y>1$

άρα $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1}$ με $x>1$

Β3. $\varphi(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1}\,,x>1$ και $\varphi'(x)=\dfrac{-\dfrac{3}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{-3}{(x+2)(x-1)}<0$

άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$

Β4. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln\dfrac{x+2}{x-1}\right)=+\infty$ αφού αν $\dfrac{x+2}{x-1}=u\,,\lim\limits_{x\to 1^+}u=+\infty$ άρα $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x+2}{x-1}\right)=0$, αφού αν $\dfrac{x+2}{x-1}=t$, $\lim\limits_{x\to+\infty}t=1$ οπότε $\lim\limits_{t\to 1}\ln t=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής άρα είναι συνεχής και στο 0.
Ετσι, $f(0)=1-\ln\lambda$

$$x<0,\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$$

$$x>0,\ \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda$$

Πρέπει: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lambda$ οπότε $1-\ln\lambda=\lambda \Leftrightarrow \lambda+\ln\lambda-1=0$

Προφανής λύση το $\lambda=1$

Θεωρώ $g(x)=x+\ln x-1,\ x>0$. Έχουμε $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε και η $1-1$ άρα το $\lambda=1$ είναι μοναδική λύση της (1).

Η f είναι :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & ,x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x & ,0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Γ2. $x<0\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1\quad(1)$

$$x>0,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1\quad(2)$$

Από $(1),(2)$ η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ άρα ορίζεται εφαπτομένη στο 0 που σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega=f'(0)=1$, άρα $\omega=\frac{\pi}{4}$

Γ3. $x<0, f(x)=\frac{1}{1-x}$ με $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$

$$0<x<\frac{3\pi}{2}, f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \quad \text{με } f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$

Άρα , τα κρίσιμα σημεία της f στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$ είναι οι θέσεις $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$

Γ4.Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\alpha,f(\alpha))$ έχει εξίσωση : $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ δηλαδή

$$y-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)$$

Για $y=0$ έχουμε $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow -(1-\alpha)=x-\alpha\Leftrightarrow\ -1+\alpha=x-\alpha\Leftrightarrow\ x=-1+2\alpha$

Άρα $B(2\alpha-1,0)$

$$x(t)=2\alpha(t)-1$$

$$x'(t)=2\alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 , έχουμε

$$x'(t_0)=2\alpha'(t_0)$$

$$x'(t_0)=2\left(-\frac{\alpha(t_0)}{3}\right)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)=-\frac{2}{3}(-1)=\frac{2}{3}\text{μον / sec}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με, $f'(x)=e^x+2x-e$ και $f''(x)=e^x+2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και 1-1

Ακόμη, η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, με $f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$

Άρα, είναι $f'(0)f'(1)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ ώστε, $f'(x_0)=0$ και αφού η f'είναι ,1-1 το x_0 είναι μοναδικό

Ακόμη έχουμε,

$$x>x_0\xRightarrow{f'\nearrow\mathbb{R}}f'(x)>f'(x_0)\Rightarrow f'(x)>0$$

και

$$x<x_0\xRightarrow{f'\nearrow\mathbb{R}}f'(x)<f'(x_0)\Rightarrow f'(x)<0$$

Η f συνεχής στο x_0, άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in(0,1)$.

Επιπλέον, $f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ (1)

Όμως,

$$f(x_0)=e-2x_0+x_0{}^2-ex_0-1\overset{(1)}{=\!=}x_0{}^2-(e+2)x_0+e-1$$

Δ2. Θεωρούμε, $h(x)=\frac{1}{f(x)-f(x_0)}$ για x κοντά στο x_0 με $x\neq x_0$.

Από το **Δ1** είναι, $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$ για κάθε $x\neq x_0$,

ενώ, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=f(x_0)-f(x_0)=0$ αφού η f είναι συνεχής στο x_0.

Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

Ακόμη, για κάθε $x\neq x_0$ έχουμε:

$$-1\leq\etaμ\frac{1}{x-x_0}\leq1\Leftrightarrow h(x)-1\leq h(x)+\etaμ\frac{1}{x-x_0}\leq h(x)+1$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-1\right)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\frac{1}{x-x_0}\right)=+\infty$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in[x_0,1]$ που είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, με $g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$ και $g(x_0)=f(x_0)$

Αλλά, $x_0<1 \xRightarrow{f\nearrow \text{στο}[x_0,+\infty)} f(x_0)<f(1)\Rightarrow f(x_0)<0\Rightarrow g(x_0)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho\in(x_0,1)$ ώστε, $g(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)+\rho=x_0$.

Ακόμη, $g'(x)=f'(x)+1>1$, αφού για κάθε $f'(x)>0$, για κάθε $x>x_0$ από το Δ1. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, επομένως η ρίζα ρ είναι μοναδική.

Δ4. Έχουμε, $f(\rho)+\rho=x_0$ (2) με $\rho\in(x_0,1)$. Η ζητούμενη ανίσωση ισοδύναμα γίνεται,

$$f(x_0)>(x_0-\rho)(f'(\kappa)+1)\xLeftrightarrow{x_0<\rho}\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)+1\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}-1<f'(\kappa)\Leftrightarrow\frac{f(x_0)-(x_0-\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)\Leftrightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)$$

Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ), άρα από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x_0,\rho)$ ώστε, $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$

Όμως,

$$x_0<\xi<\rho<\kappa<1\xRightarrow{f'\nearrow}f'(\xi)<f'(\kappa)\Rightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa),\ \text{για κάθε } \kappa\in(\rho,1)$$