ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ.111)

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις **f, g** είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ.104)

Η **f** είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 128)
Διατύπωση
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$

Γεωμετρική ερμηνεία

Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει **ένα, τουλάχιστον**, σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α4. α) **Λ** β) **Λ** γ) **Λ** δ) **Σ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της g είναι $\Delta g = \mathbb{R}$ και της h είναι $\Delta h = (0,+\infty)$

$$x \in \Delta goh \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \Delta h \\ \text{και} \\ h(x) \in \Delta g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{και} \\ h(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{άρα } Dgoh = (0,+\infty)$$

Τύπος της goh

$$(goh)(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x} = \frac{4}{x} - x \text{ με } x>0$$

Β2.

i. $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0$ για κάθε $x>0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$$\pi > e \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e}$$

Όμως $4-e^2<0$ άρα $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$

Β3. $f(x) = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) + x = \frac{4}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$ άρα η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x\to+\infty$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}(-x) = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x) = +\infty$

Η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x}-x\right)=-\infty$

Έχουμε $\left|συν\left(1+x^2\right)\right|\le 1$ πολλαπλασιάζω με $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$

Τότε $\left|\dfrac{συν\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right|\le\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$

Άρα $-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\le\dfrac{συν\left(1+x^2\right)}{f(x)}\le\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right|=0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{συν\left(1+x^2\right)}{f(x)}=0$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+a, & x\ge 1\end{cases}$$

Γ1.

$$\int_2^3 xf(x)dx=\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=\int_2^3(1+ax)dx=1\Leftrightarrow$$

$$\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow 3+\frac{9a}{2}-(2+2a)=1\Leftrightarrow$$

$$3+\frac{9a}{2}-2-2a=1\Leftrightarrow\frac{9a}{2}=2a\Leftrightarrow 9a=4a\Leftrightarrow 5a=0\Leftrightarrow a=0$$

Γ2.

i. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1\\ f(1)=1\end{array}\right\}$ η f συνεχής στο $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}\underset{DLH}{=}\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{1}=-1$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ-ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • **Κύπρου 51**, τηλ. 2109941471, 2109935566 • **Γερουλάνου 103**, τηλ. 2109911067
ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: **Ναυαρίνου 12**, τηλ. 2109944396,
ΓΛΥΦΑΔΑ: **Λ. Βουλιαγμένης 147 &Πραξιτέλους 2**, τηλ. 2109680008
email : support@romvos.edu.gr

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)+f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{x-1}\underset{DLH}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1}=-1$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$

Άρα ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$

ii. $(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$y-1=-1(x-1)$

$y-1=-x+1$

$y=-x+2$

$\lambda=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1 \Leftrightarrow \omega=135^\circ$

Γ3.

Για $x<1: f'(x)=2x-3$

x	$-\infty$ **1**
f'	-

Για $x>1: f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

x	**1** $+\infty$
f'	-

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα σύνολο τιμών της f είναι $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

Γ4.

$$E(\Omega)=\int_1^2\left(f(x)-y\right)dx+\int_2^e f(x)dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e\frac{1}{x}dx=$$

$$\left[\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_1^2+\left[\ln x\right]_2^e=$$

$$\left[\ln 2+2-4\right]-\left[\frac{1}{2}-2\right]+\left(1-\ln 2\right)$$

$$=\ln 2-2-\frac{1}{2}+2+1-\ln 2=\frac{1}{2}$$

ΕΛΛΗΝΙΚΟ-ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • **Κύπρου 51**, τηλ. 2109941471, 2109935566 • **Γερουλάνου 103**, τηλ. 2109911067
ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: **Ναυαρίνου 12**, τηλ. 2109944396,
ΓΛΥΦΑΔΑ: **Λ. Βουλιαγμένης 147 &Πραξιτέλους 2**, τηλ. 2109680008
email : support@romvos.edu.gr

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Κοντά στο $x_0 = 1$ ορίζω

$$g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x - 1} \quad \text{με } \lim_{x\to 1} g(x) = l \quad \text{τότε } (x-1)g(x) + 2x = f(x)$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)g(x) + 2x\right] = 2$$

$$2 = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa\right] = -1 + \kappa \text{ άρα } \kappa = 3$$

Δ2.

Άρα $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3$

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - x}{(2-x)x^2} = \frac{-x^2 - x + 2}{(2-x)x^2} = \frac{(x-1)(-x-2)}{(2-x)x^2} = \frac{-(x-1)(x+2)}{(2-x)x^2} \quad \text{με } x \in (0,2)$$

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(2-x) + 3\right] = \ln 2 + 3, \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ άρα } \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\ln(2-x)\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^-}\left[-\frac{1}{x} + 3\right] = -\frac{1}{2} + 3 \text{ άρα } \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

Έστω $A_1 = (0,1]$ τότε $f(A_1) = (-\infty, 2]$

$0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1 \in A_1$ και μάλιστα μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1, τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Έστω $A_2 = [1,2)$ τότε $f(A_2) = (-\infty, 2]$ όμως $0 \in f(A_2)$

άρα υπάρχει $x_2 \in A_2$ και μάλιστα μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 ,τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Επειδή $\frac{1}{3} \in A_1$ τότε $x_1 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3}$

που ισχύει αφού $\ln\frac{5}{3} = \ln\left(1 + \frac{2}{3}\right) > 0$

Δ3.

Ισχύει το ΘΜΤ στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$

Άρα υπάρχει $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right): f'(\xi)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}}=\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

$$f''(x)=\frac{-1}{(2-x)^2}-\frac{2x}{x^4}=-\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}<0,\quad x\in(0,2)$$

Άρα f' είναι γνησίως φθίνουσα και το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

i. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=F(x_2)-F(x_1)$

Και $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=G(x_2)-G(x_1)$

Τότε $F(x_2)-F(x_1)=G(x_2)-G(x_1)\Leftrightarrow F(x_2)=-G(x_1)\ \Leftrightarrow F(x_2)+G(x_1)=0$

(ii) Ορίζω $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in[x_1,x_2]$

Είναι

$$h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2=-x_2F(x_2)+x_1-x_2=-(x_2F(x_2)+x_2-x_1)$$

και

$$h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1.$$

f γνησίως αύξουσα για $x\in(x_1,1)$, άρα $x>x_1\Leftrightarrow f(x)>f(x_1)=0$

f γνησίως φθίνουσα για $x\in(1,x_2)$, άρα $x<x_2\Leftrightarrow f(x)>f(x_2)=0$

Δείξαμε $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(x_1,x_2)\ \Leftrightarrow F'(x)>0\Leftrightarrow x\in(x_1,x_2)$, άρα F γνησίως αύξουσα στο (x_1,x_2)

Αν $x_1<x<x_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}F(x_1)<F(x)<F(x_2)\Leftrightarrow 0<F(x)<F(x_2)$

Άρα $F(x_2)>0$

- $F(x_2)>0$

  $\Leftrightarrow x_2F(x_2)>0$ και $x_2-x_1>0$

  Άρα $x_2F(x_2)+x_2-x_1>0\Leftrightarrow -(x_2F(x_2)+x_2-x_1)<0\Leftrightarrow h(x_1)<0$

- $F(x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1F(x_2) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$

  Άρα $x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0 \Leftrightarrow h(x_2) > 0$

Τότε $h(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$

Τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_1F(x_0) + x_2G(x_0) = x_1 + x_2 - 2x_0$

Όμως $h'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 = (x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

Άρα x_0 μοναδικό τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και κάλυπταν όλο το εύρος της ύλης . Υπήρχαν ωστόσο κάποια ερωτήματα που απευθύνονταν σε πολύ καλά διαβασμένους μαθητές.

Συγγραφή Απαντήσεων

Ομάδα Μαθηματικών Ρόμβου