ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 31 σχολικού βιβλίου

Α.2 α) Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου

β) Σελίδα 87 σχολικού βιβλίου

Α.3

α – Λάθος

β – Λάθος

γ – Σωστό

δ – Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - \left(3x^2\right)' + \left(5x\right)' + \left(\frac{1}{3}\right)' = x^2 - 6x + 5$

Β2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 - 20 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Επομένως $x_1 = \frac{6-4}{2} = 1$ **και** $x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$

ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • **Κύπρου 51**, τηλ. 2109941471, 2109935566 • **Γερουλάνου 103**, τηλ. 2109911067
ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: • **Ναυαρίνου 12**, τηλ. 2109944396,
ΓΛΥΦΑΔΑ: **Λ. Βουλιαγμένης 147** & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008
www.romvos.edu.gr - email : support@romvos.edu.gr

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f΄(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

Σύμφωνα με τον πίνακα μονοτονίας:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και στο $[5, +\infty)$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 1$

  το $f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 5$

  το $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 125 - 3 \cdot 25 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{126}{3} - 50 = -8$

Β3. Βρίσκουμε ότι $f(0) = \frac{1}{3}$ επομένως θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής είναι $\lambda = f'(0) = 5$, άρα η εξίσωση (ε): $y = \lambda x + \beta$ γίνεται $y = 5 \cdot x + \beta$.

Επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου $M\left(0, \frac{1}{3}\right)$, επομένως

$\frac{1}{3} = 5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$. Τελικά είναι η (ε): $y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}$.

Β4. Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = 1 + 6 + 5 = 12$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

$$s = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Γ.2

$$CV = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{4}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow 20\bar{x} = 400 \Leftrightarrow \bar{x} = 20$$

Γ.3

$$\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20 \Leftrightarrow \frac{90+\kappa}{5} = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90+\kappa = 100 \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Για τη διάμεσο πρέπει να βάλουμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά άρα

14, 16, 18, 22, 30

επομένως $\delta = t_3 = 18$

Γ.4

Έστω y_i, i=1,2,...5 οι θερμοκρασίες που θα προκύψουν μετά την αύξηση κατά 10% των θερμοκρασιών x_i i=1,2...5.

Τότε ισχύει ότι :

$$y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i \Leftrightarrow y_i = \frac{100x_i}{100} + \frac{10x_i}{100} = \frac{110}{100}x_i = \frac{11}{10}x_i$$

Για τη νέα μέση τιμή ισχύει $\bar{y} = \frac{11}{10}\bar{x} = \frac{11}{10}20 = 22$

Για τη νέα τυπική απόκλιση ισχύει $s_y = \frac{11}{10}s = \frac{44}{10}$

Τότε ο συντελεστής μεταβολής είναι $CV\% = \frac{s_y}{\bar{y}}100 = \frac{\frac{44}{10}}{22}100 = \frac{44}{22\cdot 10}100 = 20$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ισχύει η σχέση

$AB^2 = OA^2 + OB^2$, επομένως προκύπτει η σχέση

$$10^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}.$$

Η πλευρά y άρα εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$,

Η παράσταση ορίζεται όταν $100 - x^2 \geq 0$, όπου

$$100 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$$

Ο πίνακας πρόσημων του τριωνύμου είναι

x	$-\infty$		-10		10		$+\infty$
$100-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ταυτόχρονα όμως ισχύει ότι $x, y > 0$ ως πλευρές τριγώνου, τελικά $0 < x < 10$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = (0, 10)$.

Δ2. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$

Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης όταν $x = 8$ είναι

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 8^2}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Δ.3

$$\lim_{x \to 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{100 - x^2}^{\,2} - 8^2}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(6+x)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{-(x-6)(6+x)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(6+x)}{\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}=-\frac{3}{4}$$

Δ4. Για κάθε $0 < x < 10$ ισχύει ότι $f'(x) < 0$ επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της . Από τον ορισμό της γν. φθίνουσας και τη διάταξη των τιμών που έχουν δοθεί προκύπτει ότι:

$$x_1 < x_3 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα κάλυπταν επαρκώς όλο το εύρος της ύλης.

Στο Θέμα Α, τα ερωτήματα ήταν κατανεμημένα και στα δύο κεφάλαια.

Στο Θέμα Β, τα ερωτήματα ήταν πάνω σε βασικές γνώσεις του 1^{ου} κεφαλαίου χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Το Θέμα Γ, απαιτούσε βασικές γνώσεις 2^{ου} κεφαλαίου, το Γ1 είχε και συνδυασμό με τα όρια από το κεφάλαιο των συναρτήσεων, το Γ4 θεωρείται αυξημένης δυσκολίας σε σχέση με τα υπόλοιπα για τους μαθητές αλλά το είχαμε προετοιμάσει επαρκώς.

Στο Θέμα Δ, επιλέχθηκε πρόβλημα ρυθμού μεταβολής. Στο Δ1 οι μαθητές έπρεπε να κάνουν χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος και να ορίσουν τη συνάρτηση βάση των δεδομένων του προβλήματος συνδυαστικά με τις αλγεβρικές τους γνώσεις.

Γενικά, θεωρούμε πως το 70/100 είναι ένας εφικτός στόχος για έναν μαθητή με τις βασικές γνώσεις της χρονιάς.

Συγγραφή Απαντήσεων

Ζιάβρα Νικολέττα

Τσαρπαλή Ειρήνη