ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Α.2Σχολικό βιβλίο σελίδα 155
Α.3 Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α.4 α) ΣΩΣΤΟ **β)** ΣΩΣΤΟ **γ)** ΛΑΘΟΣ **δ)** ΛΑΘΟΣ **ε)** ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $A_f = A_{\frac{g}{h}} = \{x \in [1, +\infty) \ / \ h(x) \neq 0\} = (1, +\infty)$

$$h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$A_r = A_{g \cdot h} = [1, +\infty)$

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

Β.2.Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η f συνεχής με

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

Άρα η fείναι γνησίως φθίνουσα και επομένως 1-1 οπότε αντιστρέφεται με

$$y = f(x) \Leftrightarrow y(x-1) = x+1 \Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow$$
$$yx - x = y+1 \Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της fκαι αφού fείναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$τότε $A_{f^{-1}} = f\left((1,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)\right) = (1,+\infty)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ με $x > 1$

Β.3. $r(x) = x - \frac{1}{x}$ με $x \geq 1$

Δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη γιατί είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$

Θα αναζητήσουμε οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ και}$$
$$\lim_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Οπότε η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι $y = x$

Β' τρόπος: $r(x) - x = -\frac{1}{x}$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

Οπότε η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι $y = x$

Β.4. Οι λύσεις τις εξίσωσης ορίζονται στο $(1, +\infty)$

$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow$

$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x - 4) - (x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$x = \pm 1$ απορρ. $\quad x = 4$ δεκτή

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 2$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$.

Όπου $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = e^\lambda$ και $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 + \lambda$, τελικά $e^\lambda = 1 + \lambda$.

Επειδή $e^x \geq x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$, η παραπάνω εξίσωση $e^\lambda = 1 + \lambda$ έχει μοναδική λύση $\lambda = 0$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$

Γ2. $f'(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < 2 \\ -2x + 4, & x > 2 \end{cases}$

Επειδή $f'(x) < 0$ στα διαστήματα $(0, 2)$ και $(2, +\infty)$ και η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Η f έχει ολικό μέγιστο στο $x = 0$, το $f(0) = 5$.

Γ.3 i) Η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. καθώς δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ γιατί:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2,\text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$$

ii) Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{-5}{3}$

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0,2)$ διότι $f'(\xi)=-2$.

Για $\xi\in(2,3)$ έχουμε $-2\xi+4=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2\xi=-\dfrac{17}{3}\Leftrightarrow \xi=\dfrac{17}{6}$, δεκτή

Β' τρόπος: Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{-5}{3}$

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0,2)$ διότι $f'(\xi)=-2$.

Για $\xi\in(2,3)$ ισχύει ότι $f'(x)=-2x+4$ και $f''(x)=-2<0$, άρα

x	2	3	
$f''(x)$		-	
$f'(x)$		↘	

Επομένως $D_{f^{-1}}=(-2,0)$ και επειδή $-\dfrac{5}{3}\in(-2,0)$ υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=-\frac{5}{3}$$

Γ.4 Η γωνία ω θα είναι συνάρτηση του χρόνου **t.** Το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ορθογώνιο και έστω ΑΜ=h, τότε $\varepsilon\varphi\omega(t)=\dfrac{h(t)}{2}$

Επομένως $\varepsilon\varphi\omega'(t)=\left(\dfrac{h(t)}{2}\right)'\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\dfrac{1}{2}\cdot h'(t)$

Οπότε προκύπτει $\omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot h'(t_0) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)$

Τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της f, ισχύει:

$h'(t_0) = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ αφού από Π.Θ. τη χρονική στιγμή t_0 γίνεται $OM = \sqrt{5}$

Άρα $\omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x}, \quad x > 0 \qquad f((0,+\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$

$f'(x) = \frac{1 + \alpha x - (\ln x + \alpha x)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e, \ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$

x	0		e		+∞
$f'(x)$		+	Ο.Μ.	-	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow 1$	

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = e$ το $f(e) = \frac{1 + \alpha e}{e} = \frac{1}{e} + \alpha$

Από το σύνολο τιμών $\frac{1}{e} + \alpha = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 1$

Δ2. $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}, x > 0$

Επειδή $0 \in \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Έστω $A_2 = [e, +\infty)$, τότε $f(A_2) = \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right]$ άρα $0 \notin f(A_2)$ και η ρίζα $x_0 \notin A_2$.

Έστω $A_1 = (0, e]$, τότε $f(A_1) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ άρα $0 \in f(A_1)$ και η ρίζα $x_0 \in A_1$ και είναι μοναδική γιατί η f στο A_1 είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < f(1)$ από Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Εναλλακτικά:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ως πράξεις συνεχών
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\ln 2 = \ln e - \ln 4 = \ln\frac{e}{4} < 0$, διότι $\frac{e}{4} < 1$

  $f(1) = 1 > 0$

  Άρα $f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ3. i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, άρα την τιμή $f(4)=1+\frac{\ln 4}{4}$ την παίρνει μόνο μια φορά.

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=1+\frac{2\ln 2}{4}\Leftrightarrow f(x)=1+\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow f(x)=f(2)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, άρα την τιμή $f(2)$ την παίρνει μόνο μια φορά για $x=2$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $x=2$ και $x=4$.

ii) Για $x>0$:

$$2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow$$

$$1+\frac{\ln 2}{2}\le 1+\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow f(2)\le f(x)$$

Για $2\le x\le e$:

$$x\ge 2\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$$

Για $e\le x\le 4$: $x\le 4\Leftrightarrow f(x)\ge f(4)\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$

Άρα για κάθε $x\in[2,4]$ είναι $f(x)\ge f(2)$

Δ4. $E=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|\,dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\frac{1-x}{e^x}\right|dx$

Θέτω $u=e^x$, τότε $du=e^x dx$ και όταν $x=-\ln 2, u=\frac{1}{2}$ και $x=0, u=1$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\right|du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)\cdot f'(u)|\,du$$

Από ερώτημα Δ2 έχουμε ότι για $x \in \left[\frac{1}{2}, x_0\right]$ είναι $f(x) \le 0$ και για $x \in [x_0, 1]$ είναι $f(x) \ge 0$, οπότε

$$E = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)\cdot f'(u)\,du + \int_{x_0}^{1} f(u)\cdot f'(u)\,du = -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}$$

$$= -\frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} = \frac{1}{2}(1 - 2\ln 2)^2 + \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα είναι κλιμακούμενης δυσκολίας.

Στο Θέμα Α, θεωρία σχολικού βιβλίου.

Στο Θέμα Β, τα ερωτήματα ήταν πάνω σε βασικές γνώσεις χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία.

Στο Θέμα Γ, τα Γ1, Γ2 ήταν εύκολα για ένα προετοιμασμένο μαθητή, το Γ3 απαιτούσε καλή γνώση της θεωρίας και το Γ4 ήταν για καλά προετοιμασμένους μαθητές.

Στο Θέμα Δ, τα ερωτήματα Δ1, Δ2 είναι εύκολα και από εκεί και πέρα τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 είναι αυτά που θα καθορίσουν τις υψηλές βαθμολογίες.

Γενικά, θεωρούμε πως το 70/100 είναι ένας εφικτός στόχος για έναν μαθητή με προετοιμασία. Κρίνουμε ότι ήταν αυξημένης δυσκολίας και η βαθμολογία κοντά στο άριστα θα είναι για πολύ καλά διαβασμένους μαθητές.

Συγγραφή Απαντήσεων
Ομάδα Μαθηματικών Ρόμβου