ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 11/6/2018

ΘΕΜΑ Α

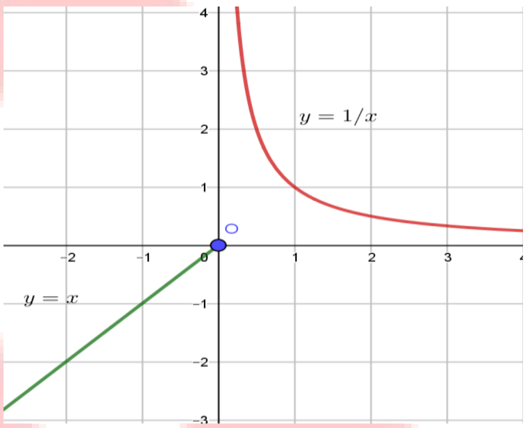
Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 99

Α2. Α) Ψευδής

Β). Σχολικό βιβλίο Σελ 35

Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$ είναι '1-1' αλλά δεν είναι γνήσια μονότονη όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 216

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2},\quad x\neq 0$

$$f'(x)=1-\frac{-4\cdot 2x}{x^4}=\frac{x^4+8x}{x^4}=\frac{x\left(x^3+8\right)}{x^4}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^3+8\right)=0$

$-\infty$	-2		0	
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$

Τ.Μ

Τοπικό Μέγιστο το $f(-2)=-2-\dfrac{4}{4}=-3$

- $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-2]$

f συνεχής στο $(-\infty,-2]$, άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty,-2]$

- $f'(x)<0$ στο $(-2,0)$

f συνεχής στο $[-2,0)$, άρα $f \searrow$ στο $[-2,0)$

- $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, άρα $f \nearrow$ στο $(0,+\infty)$

B2. $f'(x)=\dfrac{x^3+8}{x^3}$

$$f''(x)=\frac{3x^2\cdot x^3-3x^2\left(x^3+8\right)}{x^6}=\frac{-24x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}$$

- $f''(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\frown$	‖	$\frown$

Δεν έχει σημεία καμπής

B3. (Οριζόντια Ασύμπτωτη) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$. Δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

(Οριζόντια Ασύμπτωτη) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=+\infty$. Δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

(Κατακόρυφη ασύμπτωτη) στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$$

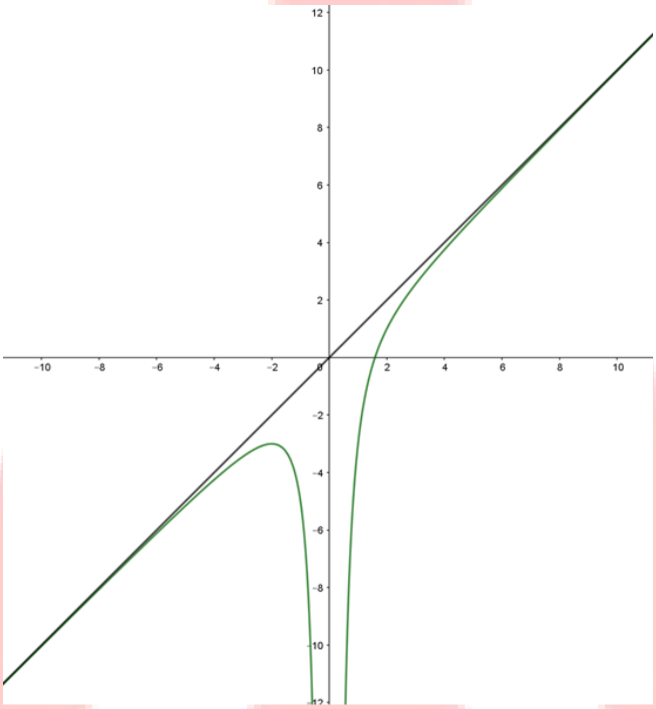
Άρα κατακόρυφη ασύμπτωτη η $x=0$ από αριστερά και δεξιά.

(Πλάγια ασύμπτωτη) ισχύει $f(x)-x=-\dfrac{4}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$ άρα πλάγια ασύμπτωτη η $\psi=x$ στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=0$ άρα πλάγια ασύμπτωτη η $\psi=x$ στο $+\infty$

Β4. Πρόχειρη γραφική παράσταση



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι x m, οπότε η πλευρά του θα είναι $\frac{x}{4}$. Επειδή το x παριστάνει μήκος πρέπει να είναι $x>0$ αλλά και $x<8$ που είναι το συνολικά μήκος του σύρματος, άρα $0<x<8$. Επομένως το εμβαδό του τετραγώνου είναι $\frac{x^2}{16}$. Με το υπόλοιπο του σύρματος το οποίο είναι $8-x$ κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει μήκος:

$$L=2\pi\rho \Leftrightarrow 8-x=2\pi\rho \Leftrightarrow \rho=\frac{8-x}{2\pi}\,m$$

Οπότε ο κύκλος έχει εμβαδόν:

$$E=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\frac{(8-x)^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των 2 σχημάτων είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4(8-x)^2}{16\pi}=\frac{\pi x^2+4(64-16x+x^2)}{16\pi}$$
$$=\frac{\pi x^2+256-64x+4x^2}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Το $E(x)$ ως τριώνυμο του x με $\alpha=\frac{\pi+4}{16\pi}>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\frac{-64}{2(\pi+4)}=\frac{32}{\pi+4}$ και είναι $E\searrow(0,x_0]$ και $E\nearrow[x_0,8)$

Τότε η διάμετρος του κύκλου $\delta = 2R = \dfrac{8 - \dfrac{32}{\pi+4}}{\pi} = \dfrac{8}{\pi+4}$ και η πλευρά του τετραγώνου είναι

$\alpha = \dfrac{\dfrac{32}{\pi+4}}{4} = \dfrac{8}{\pi+4} = \delta$

Γ3. Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

αφού $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4}, 8\right)$ άρα

$$E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$$

αφού $E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to 8^-} E(x) = \lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{(\pi+4)\cdot 8^2 - 64\cdot 8 + 256}{16\pi} = 4$

$5 \in E\left(\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$ και Ε γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

$$5 \notin E\left(\left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right]\right) \text{ άρα δεν υπάρχει } x_1 \in \left(\frac{32}{\pi+4}, 8\right] \text{ ώστε } E(x_1) = 5$$

Τελικά υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \dfrac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0) = 5$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x$

$f''(x) = 2e^{x-a} - 2$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x = a$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > a$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$	

Έχουμε σημείο καμπής το $(a,f(a))$ δηλαδή το $(a,2-a^2)$

Αφού επιπλέον ορίζεται η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(a,f(a))$

Δ2. $f'(x)=2(e^{x-a}-x),\ x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=2(e^{x-a}-1)$

x	$-\infty$		x_1		a		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$+$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(x_1)$ TM	$\searrow$		$\searrow$	TE $f(x_2)$	$\nearrow$	

$f'(a)=2(1-a)<0$ ολικό ελάχιστο της f'. Αφού $f'\searrow$ στο $(-\infty,a]$ και $f'\nearrow$ στο $[a,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2(e^{x-a}-x)\right]=+\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-a}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

Όμοια : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a}\cdot\left[1-\dfrac{x}{e^{x-a}}\right]\right)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-a}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-a}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-a}}=0$ συνεπώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^{x-a}}\right)=1>0$

- $A_1=(-\infty,a]$: f' συνεχής και $\searrow$ άρα $f'(A_1)=\left[f'(a),\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=\left[2\underbrace{(1-a)}_{-},+\infty\right)$

$0\in f'(A_1)\to$ υπάρχει $x_1\in(-\infty,a)$: $f'(x_1)=0$ και x_1 μοναδικό αφού $f'\searrow$ στο A_1

$f'(x)=0=f'(x_1)\overset{f'\searrow\text{ άρα 1–1}}{\Leftrightarrow}x=x_1$

$f'(x)>0=f'(x_1)\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}x<x_1$

$f'(x)<0=f'(x_1)\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}x>x_1$

- $A_2=[\alpha,+\infty)$: f' συνεχής και $\nearrow$ άρα $f'(A_2)=\left[f'(\alpha),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left[\underbrace{2(1-\alpha)}_{-},+\infty\right)$

$0\in f'(A_2)\Rightarrow$ υπάρχει $x_2\in(\alpha,+\infty):f'(x_2)=0$ και x_2 μοναδικό αφού $f'\nearrow$ στο A_2

$f'(x)=0=f'(x_2)\underset{1-1}{\overset{f'\nearrow \text{ στο } A_2}{\Leftrightarrow}}x=x_2$

$f'(x)>0=f'(x_2)\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}x>x_2$

$f'(x)<0=f'(x_2)\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}x<x_2$ έτσι έχουμε τον παραπάνω πίνακα : $f\nearrow$ στο $(-\infty,x_1]$, $f\searrow$ στο $[x_1,x_2]$ και $f\nearrow[x_2,+\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2

Δ3. Αν $x\in(\alpha,x_2)$ $f\searrow$ με $\Sigma T_f=(f(x_2),f(\alpha))=(f(x_2),2-\alpha^2)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ανίσωση $f(1)>2-\alpha^2$ με $\alpha>1$

$$2\cdot e^{1-\alpha}-1>2-\alpha^2\Leftrightarrow 2\cdot e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0 \text{ για κάθε } \alpha>1$$

$$g(\alpha)=2\cdot e^{1-\alpha}+\alpha^2-3>0$$

$$g'(\alpha)=-2e^{1-\alpha}+2\alpha$$

$$g''(\alpha)=2e^{1-\alpha}+2>0 \text{ και } g' \text{ συνεχής άρα } g'\nearrow \text{ στο } [1,+\infty)$$

Για κάθε $\alpha>1\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(\alpha)>g'(1)$ με $g'(\alpha)>0$ και g συνεχής στο $[1,+\infty)$

$$g\nearrow \text{ για κάθε } \alpha>1\Rightarrow g(\alpha)>g(1)$$

$$g(\alpha)>0 \text{ για κάθε } \alpha>1$$

<u>β' τρόπος</u>

Έχουμε ότι $f'(x_1)=0\Leftrightarrow e^{x_1-\alpha}=x_1$

$x_1<\alpha\Rightarrow x_1-\alpha<0\Rightarrow e^{x_1-\alpha}<e^0\Rightarrow e^{x_1-\alpha}<1\Leftrightarrow x_1<1$

Άρα $x_1<1<\alpha<x_2\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(1)>f(x)>f(x_2)$

Επομένως για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$ θα είναι $f(x)<f(1)$

Δ4. Η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(2,f(2))$ είναι

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y+2=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+2$$

Άρα για κάθε $x\geq 2$ έχω :

$$f(x)\geq -2x+2\overset{\sqrt{x-2}\geq 0}{\Rightarrow}f(x)\sqrt{x-2}\geq -2\cdot(x-1)\sqrt{x-2}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο 2 άρα

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx \quad (1)$$

ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ: • **Κύπρου 51**, τηλ. 2109941471, 2109935566 • **Γερουλάνου 103**, τηλ. 2109911067
ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ: • **Ναυαρίνου 12**, τηλ. 2109944396,
ΓΛΥΦΑΔΑ: Λ. Βουλιαγμένης 147 &Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008
email : support@romvos.edu.gr

$$\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx$$

Θέτουμε $u = x-2 \Rightarrow du = dx$

Για $x = 2 \qquad u = 0$

$\qquad x = 3 \qquad u = 1$

Άρα

$$\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2}dx = \int_0^1 -2(u+1)\sqrt{u}du = \int_0^1 -2u\sqrt{u}du - 2\int_0^1 \sqrt{u}du = = -2\frac{2}{5}\left[4^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - 2\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{32}{15}$$

<u>Σχόλιο Θεμάτων</u>

Το δεύτερο θέμα είναι προσιτό για το μέσο υποψήφιο και επομένως οι μαθητές μπορούν εύκολα να προσεγγίσουν την βάση . Το τρίτο όμως και το τέταρτο θέμα είναι απαιτητικά με αρκετές πράξεις για καλά προετοιμασμένους μαθητές . Τα θέματα ήταν διατυπωμένα με σαφήνεια , κλιμακούμενης δυσκολίας .

<u>Συγγραφική Ομάδα Μαθηματικών ΡΟΜΒΟΥ</u>