ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑ.Λ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 28.
Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδες 58-59.
Α3. α-ΛΑΘΟΣ, β-ΣΩΣΤΟ, γ-ΛΑΘΟΣ , δ-ΛΑΘΟΣ, ε-ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $CV=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow \frac{20}{100}=\frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}}\Leftrightarrow \frac{20}{100}=\frac{2}{\bar{x}}\Leftrightarrow 20\bar{x}=200\Leftrightarrow \bar{x}=10$

Β2. $\bar{x}=10\Leftrightarrow \frac{\kappa+7+10+11+11+13}{6}=10\Leftrightarrow \kappa+52=60\Leftrightarrow \kappa=8$

Β3. Αν κ = 8 οι τιμές του δείγματος είναι
7, 8, 10, 11, 11, 13

Άρα η διάμεσος είναι $\delta=\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{10+11}{2}=10{,}5$

Και το εύρος είναι $R=t_{max}-t_{min}=13-7=6$

Β4.
Για το νέο δείγμα που θα προκύψει ισχύει:
$\bar{y}=\bar{x}-2$

$s_y=s_x$

Άρα $CV_y=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0.25$

Άρα CV_y %=25% δεν είναι ομοιογενές το δείγμα γιατί CV%>10%.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}(x^2-2x+10)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}(2x-2)=$$

$$\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

Γ2.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x = 1 το $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot 1+10}=\sqrt{9}=3$

Επομένως $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 3$

Γ3.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f θα είναι της μορφής

y = λx +β

$$\lambda=f'(5)=\frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \lambda=\frac{4}{5}$$

$$f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}=5$$

Άρα το σημείο επαφής είναι Μ(5, 5)

Επομένως $y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow 5=\frac{4}{5}5+\beta \Leftrightarrow \beta=1$

Και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{4}{5}x+1$

Γ4.

Στο σημείο τομής με τον x΄x είναι y = 0 ,αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας προκύπτει:

$$\frac{4}{5}x+1=0 \Leftrightarrow 4x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4} \quad \text{άρα } A\left(-\frac{5}{4},0\right)$$

Στο σημείο τομής με τον y΄y είναι x = 0 ,αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας προκύπτει:

$$y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Leftrightarrow y=1 \text{ άρα } B(0,1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για $\lambda = 3$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ και $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ άρα $\frac{3}{8} < \frac{5}{6} \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$

Δ2.

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1}\frac{3\,(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)(\sqrt{x}^2-1^2)} =$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = 6$$

Δ3.

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος, τότε

$f'(x) \geq f'(x_0)$.

Από το ερώτημα Δ1 γνωρίζουμε ότι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq f'(1)$ άρα $x_0 = 1$ και $f(x_0) = f(1) = 1$.

Τελικά το σημείο είναι Α(1,1).

<u>Δεύτερος τρόπος λύσης του Δ3:</u>

Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος, τότε

ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $f'(x_0)$.

$f'(x_0) = 3{x_0}^2 - 6x_0 + 3$

$f''(x_0) = 6x_0 - 6$

$f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	O.E	↗	

Επομένως στο $x_0 = 1$ η f'(x) παρουσιάζει ελάχιστο .

'Αρα $x_0 = 1$ και $f(x_0) = f(1) = 1$.

Τελικά το σημείο είναι Α(1,1).

Δ4.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + \lambda = 0$ η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με $\Delta = 36 - 12\lambda$.

Για να μην παρουσιάζει ακρότατα αρκεί $\Delta \le 0$ προκειμένου να διατηρεί το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας (Δ=0) ή να μην έχει καθόλου ρίζες (Δ<0).

Επομένως $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda \le 0 \Leftrightarrow -12\lambda \le -36 \Leftrightarrow \lambda \ge 3$

Άρα η μικρότερη τιμή το λ είναι η λ=3.

Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και εξέταζαν ικανοποιητικό εύρος της ύλης. Στα θέματα Α, Β, Γ ένας καλά διαβασμένος μαθητής μπορούσε να ανταπεξέλθει χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες. Δυσκολία, ενδεχομένως, να αντιμετώπισαν οι εξεταζόμενοι στο ερώτημα Δ4 καθώς απαιτούσε γνώσεις από την ύλη που έχουν διδαχθεί στην Α΄ Λυκείου.

Ζιάβρα Νικολέττα
Τσαρπαλή Ειρήνη