ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑΛ 9/6/2018

ΘΕΜΑ Α

Α.1.

α – θεωρία σχολ. Βιβλίου σελ. 65

β - θεωρία σχολ. Βιβλίου σελ. 65

γ - θεωρία σχολ. Βιβλίου σελ. 65

Α.2. θεωρία σχολ. Βιβλίου σελ.22

Α.3.

α – Σωστό

β – Λάθος

γ – Λάθος

δ – Σωστό

ε – Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι ν = 5 (περιττός αριθμός).

Άρα η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή $\delta = t_3$.

Καμία από τις παρατηρήσεις που μας δίνονται αριθμητικά δεν είναι ίση με 15, επομένως $t_3 = 4\alpha - 1$

$$4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha = 16 \Leftrightarrow$$
$$\alpha = 4$$

Β.2.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{\nu} = \frac{12+14+15+16+18}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} (t_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{(12-15)^2 + (14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (18-15)^2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Β.3.

$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$

$CV\%=\dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100=\dfrac{2}{15}\cdot 100\simeq 13\%$

Αφού 13% > 10% το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β.4

Το δείγμα που θα προκύψει θα έχει μέση τιμή και τυπική απόκλιση $\bar{y}$ και s_y αντίστοιχα, για τα οποία ισχύει:

$\bar{y}=-2\cdot\bar{x}+5=-25$

$s_y=|-2|\cdot s_x=4$

Άρα $CV_y=\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}=\dfrac{4}{25}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1, f(1)) είναι παράλληλη στον x΄x επομένως για τον συντελεστή διεύθυνσης ισχύει :

$f'(1)=0$ όπου $f'(x)=6x^2-6\kappa x$.

Άρα $f'(1)=0\Leftrightarrow 6-6\kappa=0\Leftrightarrow \kappa=1$.

Γ.2.

Για κ=1 η συνάρτηση γίνεται $f(x)=2x^3-3x^2+1$ η οποία έχει ρυθμό μεταβολής

$f'(x)=6x^2-6x$.

Για να βρούμε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος λύνουμε $f''(x)=0$ όπου $f''(x)=12x-6$.

Επομένως, $f''(x)=0\Leftrightarrow 12x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Συμπληρώνοντας τον πίνακα προσήμων προκύπτει:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της f(x) γίνεται ελάχιστος για x = ½ .

Γ.3.

Έστω y = λx + β η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f'}$ στο (-1, f΄(-1)).

Δηλαδή στο σημείο (-1, 12) αφού f΄(-1) = 12.

Τότε $\lambda = f''(-1) = -18$.

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της εφαπτομένης προκύπτει

$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow 12 = -18(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$.

Επομένως είναι η y = -18x – 6 .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}(x^2+4)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Δ.2.

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f(x) λύνουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

και συμπληρώνουμε τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ως προς τη μονοτονία :

Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Ως προς τα ακρότατα :

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 2020$.

Δ.3

1^{ος} τρόπος

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}=\frac{x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$$

Έστω

$$g(x)=\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\frac{(x^2+4)\dfrac{x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}-2x}{x^2}=\frac{x\sqrt{x^2+4}-2x}{x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}\right)=0$$

2^{ος} τρόπος

Έστω

$$g(x)=\frac{(x^2+4)f'(x)-2x}{x^2}=\frac{(x^2+4)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-2x}{x^2}=\frac{x\left(\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}-2\right)}{x^2}=\frac{\dfrac{x^2+4-2\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}}{x}=$$

$$=\frac{x^2+4-2\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{x^2+4}}=\frac{\left(x^2+4-2\sqrt{x^2+4}\right)\sqrt{x^2+4}}{x\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}=\frac{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}{x(x^2+4)}=$$

$$=\frac{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2(x^2+4)}{x(x^2+4)}=\frac{(x^2+4)\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{x(x^2+4)}=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-4}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0} g\ x = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}\right)=0$.

<u>**ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ:**</u>

Τα θέματα παρουσίαζαν κλιμακούμενη δυσκολία. Ένας επαρκώς προετοιμασμένος μαθητής μπορούσε να τα διαχειριστεί με επιτυχία. Τα πρώτα δύο θέματα ήταν αναμενόμενης δυσκολίας. Το τρίτο θέμα απαιτούσε προσοχή στη διατύπωση του ζητούμενου Γ2. Στο τέταρτο θέμα, το ερώτημα Δ3 θα καθορίσει τις άριστες επιδόσεις καθώς ήταν αρκετά απαιτητικό σε πράξεις.

<u>**Συγγραφική Επιμέλεια**</u>
Ζιάβρα Νικολέττα
Τσαρπαλή Ειρήνη