ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Σχολικό βιβλίο σελ. 15

β. Σχολικό βιβλίο σελ. 36

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α4. α. Λάθος

Π.χ $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ 1, x>0\end{cases}$ αλλά $f'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 0, x>0\end{cases}$

β. Λάθος

Π.χ $f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ αλλά $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f(0)=1$

Α5. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\Omega_1-\Omega_2+\Omega_3=2-1+3=4$

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=e^{-x}+\lambda$

Β1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=0+\lambda=\lambda$, άρα $\lambda=2$

Β2. $h(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x$

- $h(x)$ συνεχής στο $[2,3]$
- $\left.\begin{array}{l}h(2)=e^{-2}>0\\ h(3)=e^{-3}-1<0\end{array}\right\} h(2)h(3)<0$

Άρα εφαρμόζεται για την h το Θ.Bolzano στο $[2,3]$ και άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$:

$h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$

$h'(x)=-e^{-x}-1<0$ άρα $h \searrow$ στο $(2,3)$ και 1-1

Άρα x_0 μοναδική ρίζα της $h(x)=0$

B3. $f'(x)=-e^{-x}<0$ $f \searrow$ άρα 1-1 στο $\mathbb{R}$

$$f(x)=\psi \Leftrightarrow e^{-x}+2=\psi \Leftrightarrow e^{-x}=\psi-2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\psi-2>0\\ \ln e^{-x}=\ln(\psi-2)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\psi>2\\ -x=\ln(\psi-2)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

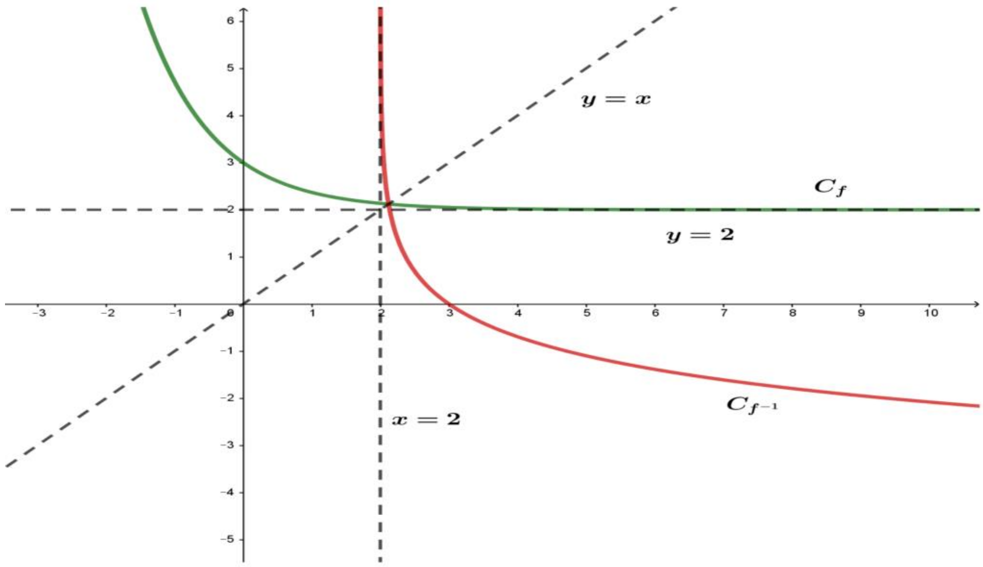
$$\left\{\begin{matrix}\psi>2\\ x=-\ln(\psi-2)=f^{-1}(\psi)\end{matrix}\right\}$$

Δηλαδή $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με $x>2$

B4. $f^{-1}(x)=-\ln(x-2) \quad x>2$

$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] \underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-2}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}-\ln u=+\infty$

Άρα η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της f



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x>1$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

Για κάθε $x<1$ η f συνεχής και παραγωγίσιμη ως άθροισμα τέτοιων

Οπότε πρέπει f να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x=1$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x & x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+a\right)=1+a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$$

$$f(1)=1+a$$

Άρα $1+a=\beta+1 \Rightarrow a=\beta$, διότι f συνεχής

- Αν $x<1$: $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta}{1}=1+\beta$
- Αν $x>1$: $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$

Άρα $1+\beta=2\Rightarrow \beta=1$, διότι f παραγωγίσιμη

Τελικά $a=\beta=1$

Γ2. $f'(x)=\begin{cases} 2x & x\ge 1 \\ e^{x-1}+1 & x<1 \end{cases}$

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\ge 1$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x<1$ και f συνεχής στο $x_0=1$

Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x-1}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to-\infty}}{\overset{u=x-1}{=}}\lim_{u\to-\infty} e^{u}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)=+\infty$$

Άρα $f(A)=\mathbb{R}$

Γ3. i. $0\in f(A)=\mathbb{R}$ άρα υπάρχει $x_0\in A=\mathbb{R}: f(x_0)=0$ και $f\nearrow$ άρα 1-1 , τότε x_0 μοναδικό

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{1}{e}>0 \\ f(-1)=e^{-2}-1<0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)\cdot f(-1)<0$$

Άρα Θ.Bolzano $x_0\in(-1,0)$ ώστε $f(x_0)=0$

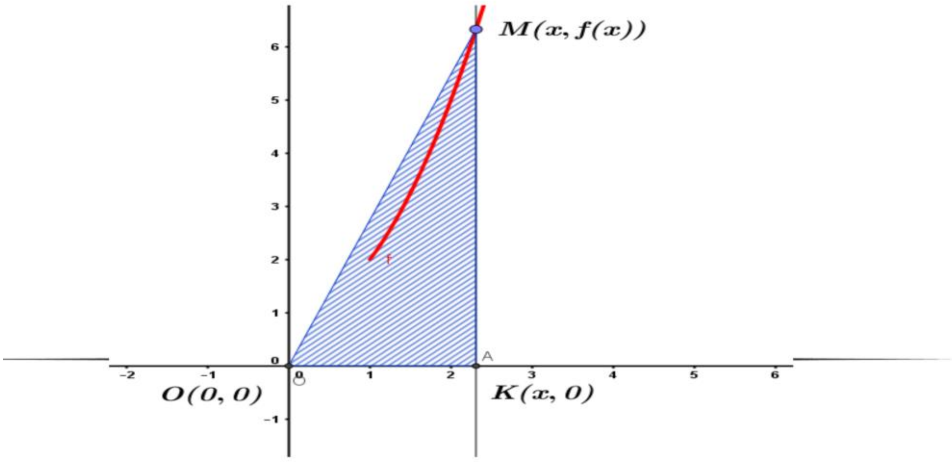
Άρα η ρίζα είναι αρνητική

ii. $f^2(x)-x_0f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$ αδύνατη

διότι $f(x)\neq 0$ στο $(x_0,+\infty)$

Αν $x>x_0 \xrightarrow{f\nearrow} f(x)>f(x_0)=0$ άρα $f(x)-x_0>-x_0>0$

Γ4.



$x(t)>0, y(t)>0$ **τότε**

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot \psi(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot\left[x^2(t)+1\right]=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$$

$$E'(t)=\frac{3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2}$$

Αν $t=t_0 : E'(t_0)=\frac{3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)}{2}=\frac{3\cdot 3^2\cdot 2+2}{2}=\frac{56}{2}=28\ \mu^2/s$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$

- $f(1)=1 \Leftrightarrow a+\beta=1$ (1)

  $$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)+a$$

  $$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a$$

  $$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \ln 1+\frac{2(1-1)}{1-2+2}+a=-1 \Leftrightarrow a=-1 \quad (2)$$

  Από (1),(2) έχουμε $a=-1$ και $\beta=2$

Δ2. f και $-x+2$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει :

$E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|f(x)+x-2\right|dx$

Για κάθε $x\in[1,2]$ $f(x)+x-2=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2=(x-1)\ln(x^2-2x+2)\geq 0$

Οπότε $E=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$

Θέτω $x^2-2x+2=u$

$2(x-1)dx=du$

x	1	2
u	1	2

Άρα

$E=\int_1^2\frac{1}{2}\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2 u'\ln u du=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}(2\ln 2-1\ln 1)-\frac{1}{2}\left[u\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$ τ.μ

Δ3. i. Είδαμε ότι :

$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

Έχουμε $f'(x)\geq -1\Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$

Που ισχύει αφού :

$(x-1)^2+1\geq 1\overset{\ln x\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow}\ln\left((x-1)^2+1\right)\geq\ln 1\Rightarrow\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$

ii. Η f συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ αφού για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ $0<\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda<\lambda+\frac{1}{2}$

παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$

$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$

Όμως

$$f'(\xi)\ge -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\ge -1\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge f(\lambda)-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\ge (\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\ge (\lambda-1)\left(\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)\right)+\frac{3}{2}$$

Δ4. Έστω $A(x_1,f(x_1))\in C_f$ και $B(x_2,g(x_2))\in C_g$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_1,f(x_1))$ είναι

$y=f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)=f'(x_1)x+f(x_1)-x_1f'(x_1)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_2,g(x_2))$ είναι :

$y=g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2)=g'(x_2)x+g(x_2)-x_2g'(x_2)$

Η C_f και η C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν υπάρχουν X_1 , X_2 ώστε:

$$\left.\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2)\end{cases}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{cases} f'(x_1)=-3x_2^2-1 \qquad (1) \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2\end{cases}\right\}(\Sigma)$$

Όμως $f'(x_1)\ge -1$ και $g'(x_2)=-3x_2^2-1\le -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$f'(x_1)=-1$ και $g'(x_2)=-1\Leftrightarrow$

$x_1=1$ και $x_2=0$

Διότι

$$f'(x_1)=-1\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1=-1\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}=0\Leftrightarrow x=1$$

Αφού $\ln\left[(x-1)^2+1\right]\ge 0$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1

Άρα $f'(x_1)=-1\Leftrightarrow x_1=1$

$$(\Sigma)\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x_1=1 \text{ και } x_2=0 \\ f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2\end{cases}\right\}\Leftrightarrow x_1=1 \text{ και } x_2=0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Για $x_1 = 1$ έχουμε :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$

<u>Σχολιασμός Θεμάτων</u>

Τα θέματα ήταν εξαιρετικά. Κάλυπταν το εύρος της ύλης . Υπήρχαν δυο ερωτήματα που είχαν μια σχετική δυσκολία (Δ3 ii, Δ4). Για να γράψει ένας μαθητής στα μαθηματικά πρέπει να έχει δουλέψει τα δύο προηγούμενα χρόνια . Συγχαρητήρια στην επιτροπή θεμάτων

<u>Συγγραφική Ομάδα Μαθηματικών ΡΟΜΒΟΥ</u>