



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. α.** Σχολικό βιβλίο σελ. 15

**β.** Σχολικό βιβλίο σελ. 36

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελ. 142

**A3.** Σχολικό βιβλίο σελ. 135

**A4. α.** Λάθος

$$\text{Π.χ } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \text{ αλλά } f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

**β.** Λάθος

$$\text{Π.χ } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$\text{A5. } \int_a^b f(x) dx = \Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 = 2 - 1 + 3 = 4$$

**ΘΕΜΑ Β**

$$f(x) = e^{-x} + \lambda$$

$$\text{B1. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 0 + \lambda = \lambda, \text{ άρα } \lambda = 2$$

$$\text{B2. } h(x) = f(x) - x = e^{-x} + 2 - x$$

- $h(x)$  συνεχής στο  $[2, 3]$
- $\left. \begin{array}{l} h(2) = e^{-2} > 0 \\ h(3) = e^{-3} - 1 < 0 \end{array} \right\} h(2)h(3) < 0$

Άρα εφαρμόζεται για την  $h$  το Θ. Bolzano στο  $[2, 3]$  και άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (2, 3)$ :

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

$$h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ \u03c1\u03b1 } h \text{ \u2193 \u03c3\u03c4\u03bf } (2,3) \text{ \u03ba\u03b9 } 1-1$$

\u0386\u03c1\u03b1  $x_0$  \u03bc\u03bf\u03bd\u03b1\u03b4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03c1\u03b9\u03b6\u03b1 \u03c4\u03b7\u03c2  $h(x) = 0$

**B3.**  $f'(x) = -e^{-x} < 0$   $f$  \u2193 \u03c1\u03b1  $1-1$  \u03c3\u03c4\u03bf  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \psi \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = \psi \Leftrightarrow e^{-x} = \psi - 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi - 2 > 0 \\ \ln e^{-x} = \ln(\psi - 2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi > 2 \\ -x = \ln(\psi - 2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

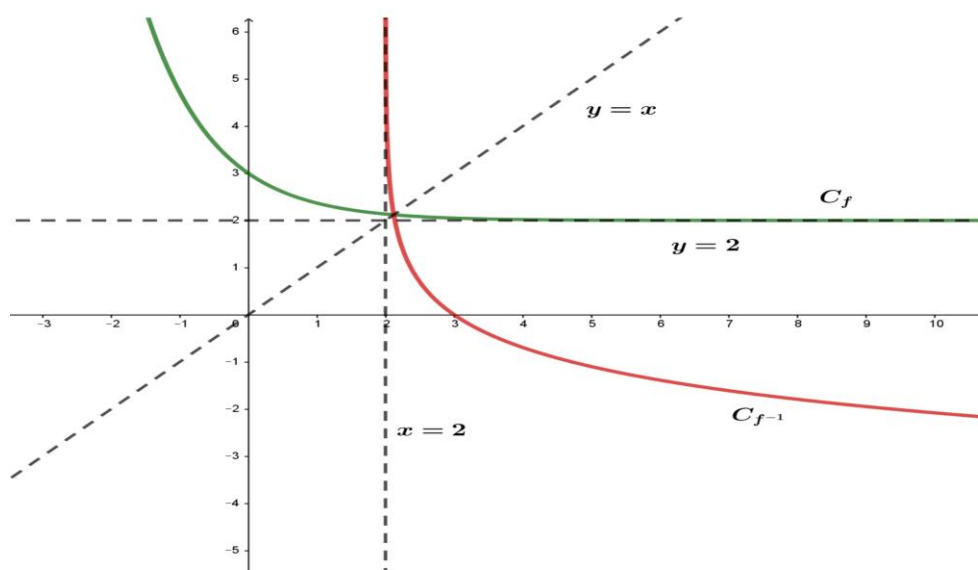
$$\left\{ \begin{array}{l} \psi > 2 \\ x = -\ln(\psi - 2) = f^{-1}(\psi) \end{array} \right\}$$

\u0386\u03b7\u03bb\u03b1\u03b4\u03b7  $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$  \u03bc\u03b5  $x > 2$

$$\mathbf{B4.} \quad f^{-1}(x) = -\ln(x - 2) \quad x > 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ \u03c1\u03b1 } \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ u \rightarrow 0^+}} -\ln u = +\infty$$

\u0386\u03c1\u03b1 \u03b7  $x = 2$  \u03ba\u03c4\u03b1\u03ba\u03cc\u03c1\u03c5\u03c6\u03b7 \u03b1\u03c3\u03cd\u03bc\u03c0\u03c4\u03c9\u03c4\u03b7 \u03c4\u03b7\u03c2  $f$



**\u0386\u03a1\u0393\u03a5\u03a1\u039e\u03a5\u03a1\u0391:** \u2022 \u039a\u03cd\u03c0\u03c1\u03bf\u03c5 51, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109941471, 2109935566 \u2022 \u0393\u03b5\u03c1\u03bf\u03c5\u03bb\u03b1\u03bd\u03bf\u03c5 103, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109911067

**\u0397\u0391\u03a9\u03a5\u03a1\u039e\u03a5\u03a1\u0391:** \u2022 \u039d\u03b1\u03c5\u03b1\u03c1\u03b9\u03bd\u03bf\u03c5 12, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109944396,

**\u0393\u0391\u03a5\u03a6\u0391\u0391\u0391:** \u0391. \u0392\u03bf\u03bb\u03b9\u03b1\u03b3\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7\u03c2 147 & \u03a0\u03c1\u03b1\u03be\u03c4\u03b5\u03bb\u03bf\u03c5\u03c2 2, \u03c4\u03b7\u03bb. 2109680008

**email :** [support@romvos.edu.gr](mailto:support@romvos.edu.gr)

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε  $x > 1$  η  $f$  συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική  
Για κάθε  $x < 1$  η  $f$  συνεχής και παραγωγίσιμη ως άθροισμα τέτοιων  
Οπότε πρέπει  $f$  να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + a) = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$$

$$f(1) = 1 + a$$

Άρα  $1 + a = \beta + 1 \Rightarrow a = \beta$ , διότι  $f$  συνεχής

- Av  $x < 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - a}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta$
- Av  $x > 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$

Άρα  $1 + \beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$ , διότι  $f$  παραγωγίσιμη

Τελικά  $a = \beta = 1$

$$\Gamma 2. f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1 & x < 1 \end{cases}$$

Άρα  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \geq 1$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x < 1$  και  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 1$

Δηλαδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

Άρα  $f(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$

Γ3. i.  $0 \in f(\mathbb{A}) = \mathbb{R}$  άρα υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{A} = \mathbb{R} : f(x_0) = 0$  και  $f \nearrow$  άρα 1-1, τότε  $x_0$  μοναδικό

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{e} > 0 \\ f(-1) &= e^{-2} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(-1) < 0$$

Άρα Θ. Bolzano  $x_0 \in (-1, 0)$  ώστε  $f(x_0) = 0$

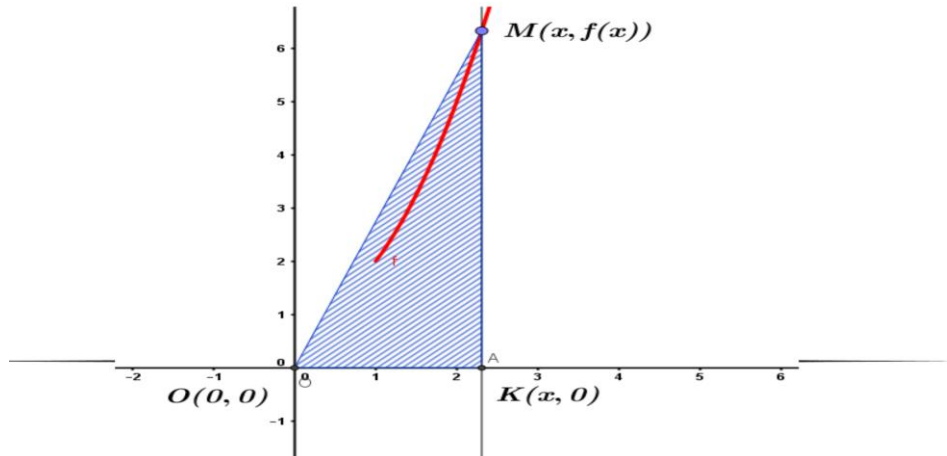
Άρα η ρίζα είναι αρνητική

ii.  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0$  αδύνατη

διότι  $f(x) \neq 0$  στο  $(x_0, +\infty)$

Αν  $x > x_0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(x_0) = 0$  άρα  $f(x) - x_0 > -x_0 > 0$

**Γ4.**



$x(t) > 0, y(t) > 0$  τότε

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot \psi(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot [x^2(t) + 1] = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2}$$

$$\text{Αν } t = t_0 : E'(t_0) = \frac{3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2}{2} = \frac{56}{2} = 28 \mu^2 / s$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Πρέπει  $f(1) = 1$  και  $f'(1) = -1$

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$  (1)

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{1}{x^2 - 2x + 2} (2x - 2) + \alpha$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{2(1-1)}{1-2+2} + \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1$$
 (2)

Από (1),(2) έχουμε  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$

**ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ:** • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

**ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ:** • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396,

**ΓΛΥΦΑΔΑ:** Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

**email :** [support@romvos.edu.gr](mailto:support@romvos.edu.gr)

**Δ2.**  $f$  και  $-x+2$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τότε ισχύει :

$$E = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)| dx = \int_1^2 |f(x) + x - 2| dx$$

$$\text{Για κάθε } x \in [1, 2] \quad f(x) + x - 2 = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$$

$$\text{Οπότε } E = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$\text{Θέτω } x^2 - 2x + 2 = u$$

$$2(x-1)dx = du$$

$x$	1	2
$u$	1	2

Άρα

$$E = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1 \ln 1) - \frac{1}{2} [u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ}$$

**Δ3. i.** Είδαμε ότι :

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

Που ισχύει αφού :

$$(x-1)^2 + 1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \ln((x-1)^2 + 1) \geq \ln 1 \Rightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

**ii.** Η  $f$  συνεχής στο  $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$  αφού για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R} \quad 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda < \lambda + \frac{1}{2}$

παραγωγίσιμη στο  $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

από ΘΜΤ υπάρχει  $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda}$$

Όμως

$$f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)(\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2)) + \frac{3}{2}$$

**Δ4.** Έστω  $A(x_1, f(x_1)) \in C_f$  και  $B(x_2, g(x_2)) \in C_g$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A(x_1, f(x_1))$  είναι

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $B(x_2, g(x_2))$  είναι :

$$y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2) = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Η  $C_f$  και η  $C_g$  δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν υπάρχουν  $X_1, X_2$  ώστε:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 \quad (1) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

Όμως  $f'(x_1) \geq -1$  και  $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$$f'(x_1) = -1 \quad \text{και} \quad g'(x_2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 0$$

Διότι

$$f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Αφού  $\ln\left[(x-1)^2 + 1\right] \geq 0$  και  $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$  με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1

$$\text{Άρα } f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 0 \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Για  $x_1 = 1$  έχουμε :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -1(x - 1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2$$

#### Σχολιασμός Θεμάτων

Τα θέματα ήταν εξαιρετικά. Κάλυπταν το εύρος της ύλης . Υπήρχαν δυο ερωτήματα που είχαν μια σχετική δυσκολία (Δ3 ii, Δ4). Για να γράψει ένας μαθητής στα μαθηματικά πρέπει να έχει δουλέψει τα δύο προηγούμενα χρόνια . Συγχαρητήρια στην επιτροπή θεμάτων

Συγγραφική Ομάδα Μαθηματικών ΡΟΜΒΟΥ

**ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ:** • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

**ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ:** • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396,

**ΓΛΥΦΑΔΑ:** Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

**email :** [support@romvos.edu.gr](mailto:support@romvos.edu.gr)