

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1

Α. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

Β. α) Σύμφωνα με το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου έχουμε :

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{ΑΒ}{10}$$

οπότε $ΑΒ=5$.

Σωστή απάντηση είναι η Δ.

β) Για το ΒΔ σύμφωνα με την εφαρμογή 1 της σελίδας 17 του σχολικού βιβλίου έχουμε $ΒΔ = \frac{ΒΓ \cdot ΑΒ}{ΑΒ + ΑΓ} = \frac{6 \cdot 4}{4 + 8} = 2$. Οπότε $ΔΓ = ΒΓ - ΔΒ = 6 - 2 = 4$

Σωστή απάντηση είναι η Δ.

ΘΕΜΑ 2

α) Έστω $ΡΑ = x$. Οι ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές του κύκλου που τέμνονται στο σημείο Ρ.

Οπότε $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ \Rightarrow ΡΑ(ΡΑ + ΑΒ) = ΡΓ \cdot ΡΔ \Rightarrow x(x + 9) = 4 \cdot 9 \Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$ με λύσεις $x = 3$ και $x = -12$ που απορρίπτεται.
Άρα $ΡΑ = 3$.

β) Η ΡΔ είναι τέμνουσα και η ΡΕ εφαπτομένη οπότε $ΡΕ^2 = ΡΓ \cdot ΡΔ \Rightarrow ΡΕ^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow ΡΕ = 6$.

Σωστή απάντηση είναι η Ε.

ΘΕΜΑ 3

α) Α' τρόπος

Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ έχουν κοινή την γωνία Α, οπότε ο λόγος των εμβαδών είναι ίσος με το λόγο του γινομένου των πλευρών που περιέχουν αυτές τις γωνίες δηλαδή :

$$\frac{(ΑΚΒ)}{(ΑΛΓ)} = \frac{ΑΚ \cdot ΑΒ}{ΑΛ \cdot ΑΓ} = \frac{\frac{ΑΓ}{2} \cdot ΑΒ}{\frac{ΑΒ}{2} \cdot ΑΓ} = 1.$$

Β' τρόπος

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΒΚ είναι η διάμεσος που όπως είναι γνωστό χωρίζει

Το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά δηλαδή : $(ΑΚΒ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$. Όμοια

$$(ΑΛΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ).$$

Οπότε $(ΑΚΒ)=(ΑΛΓ)$ δηλαδή ο λόγος τους είναι ίσος με 1.

β) Α' τρόπος

$(ΒΛΡ) = (ΑΚΒ)-(ΑΚΡΛ)$ και $(ΚΓΡ) = (ΑΛΓ)-(ΑΚΡΛ)$. Αφού $(ΑΚΒ) = (ΑΛΓ)$ έχουμε ότι τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ είναι ισεμβαδικά.

Β' τρόπος

Το Ρ είναι το βαρύκεντρο του ΑΒΓ.

$$\frac{(ΒΛΡ)}{(ΚΓΡ)} = \frac{ΡΒ.ΡΛ}{ΡΓ.ΡΚ} = \frac{\frac{2}{3}ΒΚ \cdot \frac{1}{3}ΓΛ}{\frac{2}{3}ΓΛ \cdot \frac{1}{3}ΒΚ} = 1$$

Άρα $(ΒΛΡ) = (ΚΓΡ)$.

ΘΕΜΑ 4

Η πλευρά του τετραγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διάμετρο των τεσσάρων κύκλων γιατί $40\sqrt{2} > 50$. Τότε οι κύκλοι δεν τέμνονται όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται βρίσκεται αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε τα εμβαδά των τεσσάρων ίσων κυκλικών τομέων (τεταρτοκύκλια).

$$E_1 = (ΑΒΓΔ) - 4(Α.ΚΝ) = (40\sqrt{2})^2 - 4 \frac{\pi \cdot 25^2 \cdot 90}{360} = 3200 - 625\pi \text{ m}^2.$$

- β) Με το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε τη διαγώνιο ΑΓ που είναι 80m. Ο κύκλος (μηχανισμός ποτίσματος) που θα τοποθετηθεί στο κέντρο του τετραγώνου θα πρέπει να εφάπτεται στους τέσσερις άλλους κύκλους. Η διάμετρος του ΕΖ θα είναι :

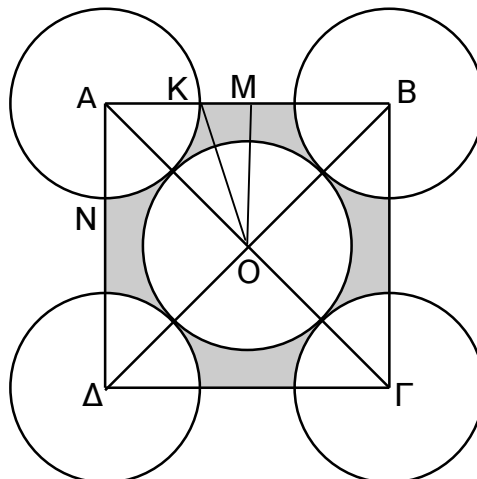
$$ΕΖ = ΑΓ - ΑΕ - ΓΖ = 80 - 25 - 25 = 30\text{m}.$$

Άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 15\text{m}$.

- γ) Το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο βρίσκεται αν από το εμβαδόν E_1 του α' ερωτήματος αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κύκλου που τοποθετήσαμε στο κέντρο του τετραγώνου.

Δηλαδή :

$$E_2 = E_1 - \pi \rho^2 = 3200 - 850\pi \text{ m}^2.$$



δ) Η ακτίνα του κύκλου αυτού είναι η ΟΚ και υπολογίζεται με πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΚΜ, όπου $ΟΜ = \frac{ΑΔ}{2} = 20\sqrt{2}$.

$$ΚΛ = ΑΒ - ΑΚ - ΛΒ = 40\sqrt{2} - 50, \text{ οπότε } ΚΜ = \frac{ΚΛ}{2} = 20\sqrt{2} - 25.$$

Δηλαδή : $ΟΚ^2 = ΟΜ^2 + ΚΜ^2$ και τελικά μετά από πράξεις βρίσκουμε $ΟΚ = \sqrt{2225 - 1000\sqrt{2}} = 5\sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$ m.

Επιμέλεια : Γκουντουβάς Σωτήρης

