

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

β) ΟΕΔΒ Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β' Λυκείου, σελ. 43

γ) ΟΕΔΒ Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β' Λυκείου, σελ.

B. α). Ε γιατί $\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & \text{απορρίπτεται} \\ \lambda = -3 & \text{δεκτή} \end{cases}$$

β)

ΣΤΗΛΗ Α'

- 1.
- 2.
- 3.

ΣΤΗΛΗ Β'

Δ
Α
Β

ΘΕΜΑ 2°

α) Έστω $\delta = (3\alpha, \beta)$. τότε $\begin{cases} \delta \mid 3\alpha \\ \delta \mid \beta \end{cases}$ ή $\begin{cases} \delta \mid 6\kappa + 6 \\ \delta \mid 6\kappa + 7 \end{cases}$

Άρα $\delta \mid 6\kappa + 7 - (6\kappa + 6)$ ή $\delta \mid 1$.

Άρα $\delta = 1$. Δηλαδή $(3\alpha, \beta) = 1$

β) Έχουμε $2\beta - \alpha = 12\kappa + 14 - 2\kappa - 2 = 10\kappa + 12 = 10 \cdot (\kappa + 1) + 2 = 10\pi + 2$, $\pi \in \mathbb{Z}$.

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 2.

γ) Έχουμε: $\kappa = 7\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Άρα $\alpha + \beta - 2 = 8\kappa + 9 - 2 = 8 \cdot 7\lambda + 7 = 7 \cdot (8\lambda + 1) = \text{πολ}, 7$, γιατί $(8\lambda + 1) \in \mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ 3°

α) $x_\Delta = \frac{8+0}{2} = 4$, $y_\Delta = \frac{0+4}{2} = 2$ Άρα $\Delta(4, 2)$

$\lambda_{\text{ΟΔ}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, άρα η εξίσωση της ευθείας ΟΔ είναι: $y = \frac{1}{2}x$

β) Αφού $\varepsilon \perp \text{ΟΔ}$ είναι $\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\text{ΟΔ}} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -2$ και επειδή η (ε) διέρχεται από το $\Delta(4,2)$ η εξίσωσή της είναι $y-2 = -2(x-4) \Leftrightarrow y = -2x+10$

γ) Το Μ είναι σημείο της (ε) , άρα οι συντεταγμένες του είναι της μορφής $(x, -2x+10)$ οπότε :

$$\overrightarrow{\text{MA}} = (8-x, 2x-10)$$

$$\overrightarrow{\text{MB}} = (-x, 2x-6)$$

$$\overrightarrow{\text{OM}} = (x, -2x+10)$$

$$\overrightarrow{\text{MA}}^2 + \overrightarrow{\text{MB}}^2 = |\overrightarrow{\text{MA}}|^2 + |\overrightarrow{\text{MB}}|^2 = (8-x)^2 + (2x-10)^2 + (-x)^2 + (2x-6)^2 = \dots\dots\dots = 10x^2 - 80x + 200 \quad (1)$$

$$2\overrightarrow{\text{OM}}^2 = 2 \cdot |\overrightarrow{\text{OM}}|^2 = 2[x^2 + (-2x+10)^2] = \dots\dots\dots = 10x^2 - 80x + 200 \quad (2)$$

Από (1), (2), έχουμε : $\overrightarrow{\text{MA}}^2 + \overrightarrow{\text{MB}}^2 = 2\overrightarrow{\text{OM}}^2$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\begin{aligned} \alpha) (x-1)^2 + y^2 &= 2n \cdot (x+y-1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2nx + 2ny - 2n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2(n+1) \cdot x + y^2 - 2ny = -2n - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-(n+1))^2 + (y-n)^2 = (n+1)^2 + n^2 - 2n - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-(n+1))^2 + (y-n)^2 = 2n^2 > 0 \end{aligned}$$

Άρα η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος με κέντρο $K(n+1, n)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2n}$.

$$\beta) (x-(n+1))^2 + (y-n)^2 = 2n^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{για } n=1 \text{ είναι: } (x-2)^2 + (y-1)^2 &= 2 \quad \left\{ \begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 8 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \\ \text{για } n=2 \text{ είναι: } (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 8 \quad \left\{ \begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y = -3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 4y = -5 \end{aligned} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε : $2x+2y=2 \Leftrightarrow x+y=1 \Leftrightarrow x=1-y$.

Από τη (2) έχουμε : $(1-y)^2 - 4 \cdot (1-y) + y^2 - 2y = -3 \Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow y=0$. Τότε $x=1$

Η (1) για $x=1$ και $y=0$ γίνεται :

$$(1-(n+1))^2 + (0-n)^2 + (0-n)^2 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 + n^2 = 2n^2 \quad \text{ισχύει}$$

Δείξαμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $A(1,0)$ επαληθεύουν την (1) για κάθε n . Άρα οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το σταθερό σημείο A .

γ) Για να εφάπτονται οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών της ευθείας (ε) : $x-y-1=0$ στο κοινό τους σημείο Α αρκεί να δείξουμε ότι :
 $d(k, \varepsilon)=\rho$

$$\text{Πράγματι } d(k, \varepsilon) = \frac{|1+n+n-1|}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n}{\sqrt{2}} = \sqrt{2n} = \rho$$

