

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 1999 – Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 5,5

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 4

B.

α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$ και $\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$, με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;

A. $\lambda = 1$,

B. $\lambda = 3$,

Γ. $\lambda = 2$,

Δ. $\lambda = -2$,

E. $\lambda = -3$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, -\sqrt{3})$, $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$ και $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'.

ΣΤΗΛΗ Α'

1. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$
2. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$
3. γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$

ΣΤΗΛΗ Β'

A. $\pi/2$

B. $\pi/6$

Γ. $\pi/4$

Δ. $2\pi/3$

E. $3\pi/4$

Z. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2k + 2$ και $\beta = 6k + 7$, όπου k ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Μονάδες 9

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - \alpha)$ με το 10 είναι 2.

Μονάδες 8

γ) Αν ο αριθμός k είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός $(\alpha + \beta - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OD .

Μονάδες 9

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ϵ) . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{OM}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1)$.

Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

Μονάδες 9

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A ;

Μονάδες 8

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A .

Μονάδες 8