

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ – Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ – 2000

ΘΕΜΑ 1°

- A. 1. $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$
 2. $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$
 3. βιβλίο σελ.....103

- B. 1. α) 3
 β) 4
 γ) 1
 2. α) Σωστό
 β) Λάθος
 γ) Σωστό
 3. B

ΘΕΜΑ 2°

α) Εφόσον ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ τότε $P(1) = 0$.

$$\text{Δηλ. } \alpha \cdot 1^3 + (\beta - 1)1^2 - 3 \cdot 1 - 2\beta + 6 = 0 \Rightarrow \alpha - \beta + 2 = 0 \quad (1)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, άρα $P(-1) = 2$ δηλ.

$$\begin{aligned} \alpha(-1)^3 + (\beta - 1)(-1)^2 - 3(-1) - 2\beta + 6 &= 2 \\ -\alpha + \beta - 1 + 3 - 2\beta + 6 - 2 &= 0 \\ -\alpha - \beta + 6 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) συνεπάγεται ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$

β) Άρα $P(x) = 2x^3 + (4-1)x^2 - 3x - 2 \cdot 4 + 6 = 0$
 $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

Ξέρουμε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα, άρα εφαρμόζοντας το σχήμα Horner καταλήγουμε ότι $P(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$

Δηλ. $\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{ή} \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$

Άρα οι λύσεις είναι οι τιμές $x = \frac{1}{2}, 1, 2$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\begin{aligned}\alpha) \text{ Έχουμε } f(x) &= 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= \eta\mu 2x - 2 \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{2} = \\ &= \eta\mu 2x - (1 - \sigma\upsilon\nu 2x) - 2(1 + \sigma\upsilon\nu 2x) = \\ &= \eta\mu 2x - 1 + \sigma\upsilon\nu 2x - 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2x = \\ &= \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x - 3\end{aligned}$$

$$\text{Αν } g(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\text{τότε } \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\eta\mu\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{οπότε } g(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 3$$

$$\beta) \text{ Η } f(x) \text{ παίρνει τη μέγιστη όταν } \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Άρα η } f \text{ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν } x = k\pi + \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \text{ και αυτή είναι η } \sqrt{2} - 3$$

$$\gamma) \text{ Έχω } f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 - \left[\sqrt{2}\eta\mu\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right) + 3\right] = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow -2\eta\mu \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow -2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma\upsilon\nu 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = -\sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{3\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

Όμως $x \in [0, \pi]$

Οπότε

$$\begin{aligned} \bullet \quad 0 \leq x \leq \pi &\Leftrightarrow 0 \leq k\pi + \frac{3\pi}{8} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq k\pi \leq \pi - \frac{3\pi}{8} \\ &\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{8} \leq k\pi \leq \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{5}{8} \text{ άρα } k=0 \end{aligned}$$

$$\text{οπότε } x = \frac{3\pi}{8}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad 0 \leq x \leq \pi &\Leftrightarrow 0 \leq k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{8} \leq k\pi \leq \pi + \frac{3\pi}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{8} \leq k\pi \leq \frac{11\pi}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq k \leq \frac{11}{8} \text{ άρα } k=1 \end{aligned}$$

$$\text{οπότε } x = \frac{5\pi}{8}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. Αφού ο πληθυσμός τριπλασιάζεται κάθε ώρα, στο τέλος της πρώτης ώρας θα έχουμε 30 βακτηρίδια.

Πρόκειται λοιπόν για γεωμετρική πρόοδο με $a_1=30$ και $\lambda=3$.

Μετά από 6 ώρες θα έχουμε

$$a_6 = a_1 \cdot \lambda^5 = 30 \cdot 3^5 = 10 \cdot 3 \cdot 3^5 = 10 \cdot 3^6 \text{ βακτηρίδια.}$$

B. B.1 Αφού η ουσία προκαλεί καταστροφή $3^3 \cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα μετά τον ψεκασμό, στο τέλος της πρώτης ώρας θα έχουμε $10 \cdot 3^6 - 3^3 \cdot 10 = 3^3 \cdot 10(3^3 - 1) = 3^3 \cdot 10 \cdot 26$ βακτηρίδια. Πρόκειται λοιπόν για μια αριθμητική πρόοδο με $a_1 = 3^3 \cdot 10 \cdot 26$ και $\omega = -3^3 \cdot 10$. Μετά από 20 ώρες από τον ψεκασμό θα έχουμε

$$a_{20} = a_1 + 19\omega = 3^3 \cdot 10 \cdot 26 - 19 \cdot 3^3 \cdot 10 = 3^3 \cdot 10 \cdot (26 - 19) = 3^3 \cdot 10 \cdot 7 = 70 \cdot 3^3 \text{ βακτηρίδια.}$$

B.2 Έστω ότι μετά από n ώρες θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια

$$\text{Τότε } a_n = 0 \Rightarrow a_1 + (n-1) \cdot \omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^3 \cdot 10 \cdot 26 + (n-1) \cdot (-3^3 \cdot 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^3 \cdot 10 \cdot 26 - 3^3 \cdot 10(n-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^3 \cdot 10(v-1) = 3^3 \cdot 10 \cdot 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v-1=26 \Rightarrow v=27$$

Άρα μετά από 27 ώρες από τον ψεκασμό θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια.

Επιμέλεια : Φώτου Κατερίνα , Ψωμάς Γεώργιος