

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$

A.2. $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ Το κέντρο του είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα του $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

A.3. Θεωρία σχολικού βιβλίου

B.1. $\Gamma. x - 3y = 10$

B.2. $\alpha \rightarrow 3, \beta \rightarrow 1$

B.3. $\alpha \rightarrow \text{Σωστό}, \beta \rightarrow \text{Λάθος}, \gamma \rightarrow \text{Λάθος}$

ΘΕΜΑ 2^ο

α : ακέραιος και k ακέραιος τότε $u = \alpha - 6k$ άρα και u είναι ακέραιος. Επίσης $0 \leq u \leq 6$ άρα ο ακέραιος u παίρνει τις τιμές : 0,1,2,3,4,5

α) Έστω :

- $u = 0$ τότε $\alpha = 6k = 2(3k)$ Ο α διαιρείται και με το 2 και με το 3
 $= 3(2k)$
- $u = 1$ τότε $\alpha = 6k + 1 = \begin{cases} 2 \cdot (3k) + 1 \\ 3 \cdot (2k) + 1 \end{cases}$ Ο α δεν διαιρείται ούτε με το 2, ούτε με το 3
- $u = 2$ τότε $\alpha = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ Ο α διαιρείται με το 2
- $u = 3$ τότε $\alpha = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ Ο α διαιρείται με το 3
- $u = 4$ τότε $\alpha = 6k + 4 = 2(3k + 2)$ Ο α διαιρείται με το 2
- $u = 5$ τότε $\alpha = 6k + 5 = \begin{cases} 2 \cdot (3k) + 4 + 1 = 2 \cdot (3k + 2) + 1 \\ 3 \cdot (2k) + 3 + 2 = 3 \cdot (2k + 1) + 2 \end{cases}$ Ο α δεν διαιρείται ούτε με το 2, ούτε με το 3

Από τα παραπάνω ο α παίρνει τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή την μορφή $\alpha = 6k + 5$, όπου k ακέραιος.

β) Έστω $\alpha = 6k + 1$ τότε $\alpha^2 = 36k^2 + 12k + 1 =$
 $= 3(12k^2 + 4k) + 1 =$
 $= 3\mu + 1, \mu = 12k^2 + 4k \in \mathbb{Z}$

Έστω $\alpha = 6k + 5$ τότε $\alpha^2 = 36k^2 + 25 + 60k =$
 $= 3(12k^2 + 8 + 20k) + 1 =$
 $= 3\mu + 1, \mu = 12k^2 + 8 + 20k \in \mathbb{Z}$

άρα $\alpha^2 = 3\mu + 1, \mu \in \mathbb{Z}$

γ) Έστω α, β δύο ακέραιοι της μορφής του ερωτήματος α). Τότε από ερώτημα β) έχουμε :

$\alpha^2 = 3\mu + 1, \mu \in \mathbb{Z}$

$\beta^2 = 3\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$ οπότε $\alpha^2 - \beta^2 = 3\mu + 1 - 3\lambda - 1 =$
 $= 3\mu - 3\lambda =$
 $= 3(\mu - \lambda) = \text{πολ } 3$

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $\left. \begin{aligned} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} &= (4, -2) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} &= (-7, 8) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} &= (4, -2) + (-7, 8) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} &= (-7, 8) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3\vec{\alpha} &= (-3, 6) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} &= (-7, 8) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{\alpha} &= (-1, 2) \\ 3\vec{\beta} &= (-1, 2) - (-7, 8) = (6, -6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$
 $\vec{\alpha} = (-1, 2)$
 $\vec{\beta} = (2, -2)$

β) Θα πρέπει : $(k\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 0$
 $2k\vec{\alpha}^2 + 3k\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 0$

$$2\kappa|\vec{\alpha}|^2 + (3\kappa + 2) \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = 0 \quad 1)$$

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-1)^2 + 2} = \sqrt{5} \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \quad , \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -6$$

$$\text{Τότε } 1) \Rightarrow 2\kappa \cdot 5 + (3\kappa + 2) \cdot (-6) + 3 \cdot 8 = 0$$

$$10\kappa + 24 - 18\kappa - 12 = 0$$

$$-8\kappa = -12$$

$$\kappa = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

γ) Έστω $\vec{p}, \vec{q}$ οι συνιστώσες τότε θα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{p} + \vec{q} \\ \vec{p} \perp \vec{q} \\ \vec{q} \parallel \vec{\alpha} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{p} + \lambda \vec{\alpha} \\ \vec{p} \perp \vec{\alpha} \\ \vec{q} = \lambda \vec{\alpha} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{p} + \lambda \vec{\alpha} \\ \vec{p} \cdot \vec{\alpha} = 0 \\ \vec{q} = \lambda \vec{\alpha} \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{αφού } \vec{y} = \vec{p} + \lambda \vec{\alpha} \text{ τότε } \vec{\alpha} \cdot \vec{y} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} + \lambda \vec{\alpha})$$

$$-3 - 2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \lambda \vec{\alpha}^2$$

$$-5 = 0 + \lambda \cdot 5$$

$$\text{άρα } \lambda = -1$$

$$\text{αφού } \lambda = 1 \text{ τότε } \vec{q} = -\vec{\alpha} = (1, -2) \text{ και τότε } \vec{p} = \vec{y} - \vec{\alpha} = (3, -1) - (1, -2) = (2, 1)$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Έστω $\Phi(x_0, y_0)$ οι συντεταγμένες του φάρου τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$(\lambda - 1) \cdot x_0 + (\lambda + 1) \cdot y_0 - \lambda - 3 = 0$$

$$(x_0 + y_0 - 1) \cdot \lambda - x_0 + y_0 - 3 = 0$$

$$\text{οπότε } \left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 = 1 \\ -x_0 + y_0 = 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y_0 = 2 \\ x_0 = -1 \end{array} \right\} \text{ άρα } \Phi(-1, 2)$$

β) φωτεινή ακτίνα $K\Phi$: διέρχεται από το πλοίο που είναι στο σημείο $K(2, 2)$ τότε :

$$(\lambda - 1) \cdot 2 + (\lambda + 1) \cdot 2 - \lambda - 3 = 0$$

$$(2\lambda - 2 + 2\lambda + 2 - \lambda - 3 = 0)$$

$$(3\lambda - 3 = 0) \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{άρα } K\Phi : 0 \cdot x + 2 \cdot y - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

Επιμέλεια : Τσόγιας Δημήτρης