ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ – Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ - 2000

SAMPLE

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.

Μονάδες 2

Α.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + Γ = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

Α.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = ρ^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = ρ^2$.

Μονάδες 6

Β.1. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του M(1,-3). Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

Α. $x + 3y = 10$, Β. $5x - y = 8$, Γ. $x - 3y = 10$,

Δ. $3x + 2y = 3$, Ε. $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 4

Β.2. *Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. K (0, -1), ρ = 2
β. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. K (3, -2), ρ = 1
	3. K (3, -2), ρ = 4

Μονάδες 4

Β.3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το σημείο (1, -1) ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + λ^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6k + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ και k ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6k + 5$, όπου k ακέραιος

Μονάδες 10

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου μ ακέραιος

Μονάδες 10

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4,-2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,-2)$.

Μονάδες 7

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k, ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

Μονάδες 8

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2, 2), Λ(-1, 5) και Μ(1, 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.

Μονάδες 4,5

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

Μονάδες 6,5

ΠΡΟΜΕΘΕΥΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$

Α.2. $A^2+B^2-4\Gamma>0$ Το κέντρο του είναι $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και η ακτίνα του $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

Α.3. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Β.1. Γ. x – 3y = 10

Β.2. $\alpha\to 3$, $\beta\to 1$

Β.3. $\alpha\to$ Σωστό , $\beta\to$ Λάθος , $\gamma\to$ Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

α : ακέραιος και κ ακέραιος τότε υ = α – 6κ άρα και υ είναι ακέραιος.
Επίσης $0\le\upsilon\le 6$ άρα ο ακέραιος υ παίρνει τις τιμές : 0,1,2,3,4,5
α) Έστω :

- υ = 0 τότε α = 6κ = $2(3\kappa)$ = $3(2\kappa)$ Ο α διαιρείται και με το 2 και με το 3
- υ = 1 τότε α = 6κ + 1 $\begin{cases}2\cdot(3\kappa)+1\\3\cdot(2\kappa)+1\end{cases}$ Ο α δεν διαιρείται ούτε με το 2, ούτε με το 3
- υ = 2 τότε α = 6κ + 2 = $2(3\kappa+1)$ Ο α διαιρείται με το 2
- υ = 3 τότε α = 6κ + 3 = $3(2\kappa+1)$ Ο α διαιρείται με το 3
- υ = 4 τότε α = 6κ + 4 = $2(3\kappa+2)$ Ο α διαιρείται με το 2
- υ = 5 τότε α = 6κ + 5 = $\begin{cases}2\cdot(3\kappa)+4+1=2\cdot(3\kappa+2)+1\\3\cdot(2\kappa)+3+2=3\cdot(2\kappa+1)+2\end{cases}$ Ο α δεν διαιρείται ούτε με το 2, ούτε με το 3

Από τα παραπάνω ο α παίρνει τη μορφή α = 6κ +1 ή την μορφή α = 6κ + 5, όπου κ ακέραιος.
β) Έστω α = 6κ +1 τότε $\alpha^2=36\kappa^2+12\kappa+1=$
$=3(12\kappa^2+4\kappa)+1=$
$=3\mu+1$, $\mu=12\kappa^2+4\kappa\in Z$

Έστω α = 6κ + 5 τότε $\alpha^2=36\kappa^2+25+60\kappa=$
$=3(12\kappa^2+8+20\kappa)+1=$
$=3\mu+1$, $\mu=12\kappa^2+8+20\kappa\in Z$

άρα $\alpha^2=3\mu+1,\ \mu\in Z$

ΣΧΟΛΙΒΟΧ

γ) Έστω α, β δύο ακέραιοι της μορφής του ερωτήματος α). Τότε από ερώτημα β) έχουμε :

$\alpha^2 = 3\mu + 1$, $\mu \in Z$

$\beta^2 = 3\lambda + 1$, $\mu \in Z$ οπότε $\alpha^2 - \beta^2 = 3\mu + 1 - 3\lambda - 1 =$

$= 3\mu - 3\lambda =$

$= 3(\mu - \lambda) = \text{πολ}3$

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$$\left.\begin{array}{l} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4,-2) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,8) \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (4,-2) + (-7,8) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,8) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\vec{\alpha} = (-3,6) \\ \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7,8) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{\alpha} = (-1,2) \\ 3\vec{\beta} = (-1,2) - (-7,8) = (6,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha} = (-1,2)$$
$$\vec{\beta} = (2,-2)$$

β) Θα πρέπει : $(\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 0$

$$2\kappa\,\vec{\alpha}^2 + 3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 0$$

$$2\kappa|\vec{\alpha}|^2 + (3\kappa + 2) \cdot \vec{\alpha}\,\vec{\beta} + 3|\vec{\beta}|^2 = 0 \qquad 1)$$

$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-1)^2 + 2} = \sqrt{5}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -6$

Τότε $1) \Rightarrow 2\kappa \cdot 5 + (3\kappa + 2) \cdot (-6) + 3 \cdot 8 = 0$

$$10\kappa + 24 - 18\kappa - 12 = 0$$
$$-8\kappa = -12$$
$$\kappa = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

γ) Έστω $\vec{p}, \vec{q}$ οι συνιστώσες τότε θα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\gamma} = \vec{p} + \vec{q} \\ \vec{p} \perp \vec{q} \\ \vec{q} \parallel \vec{\alpha} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{\gamma} = \vec{p} + \lambda\vec{\alpha} \\ \vec{p} \perp \vec{\alpha} \\ \vec{q} = \lambda\vec{\alpha} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{\gamma} = \vec{p} + \lambda\vec{\alpha} \\ \vec{p} \cdot \vec{\alpha} = 0 \\ \vec{q} = \lambda\vec{\alpha} \end{array}\right. \qquad (\ I\ )$$

αφού $\vec{\gamma} = \vec{p} + \lambda\vec{\alpha}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha}(\vec{p} + \lambda\vec{\alpha})$

$$-3 - 2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \lambda\vec{\alpha}^2$$
$$-5 = 0 + \lambda \cdot 5$$

άρα $\lambda = -1$

αφού $\lambda = 1$ τότε $\vec{q} = -\vec{\alpha} = (1,-2)$ και τότε $\vec{p} = \vec{\gamma} - \vec{\alpha} = (3,-1) - (1,-2) = (2,1)$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έστω $\Phi(x_0, y_0)$ οι συντεταγμένες του φάρου τότε για κάθε $\lambda \in R$ τότε

$$(\lambda - 1) \cdot x_0 + (\lambda + 1) \cdot y_0 - \lambda - 3 = 0$$
$$(x_0 + y_0 - 1) \cdot \lambda - x_0 + y_0 - 3 = 0$$

οπότε $\left.\begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 + y_0 = 0 \\ -x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y_0 = 2 \\ x_0 = -1 \end{array}$ άρα $\Phi(-1,2)$

ΡΟΜΒΟΣ

β) φωτεινή ακτίνα ΚΦ : διέρχεται από το πλοίο που είναι στο σημείο $K(2,2)$ τότε :

$$(\lambda-1)\cdot 2+(\lambda+1)\cdot 2-\lambda-3=0$$
$$(2\lambda-2+2\lambda+2-\lambda-3=0)$$
$$(3\lambda-3=0)\Rightarrow \lambda=1$$

άρα ΚΦ : $0\cdot x+2\cdot y-1-3=0 \Leftrightarrow y=2$

Επιμέλεια : Τσόγιας Δημήτρης

ΡΟΜΒΟΣ