

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ζήτημα 1^ο

A.1. Θεωρία (σχ. βιβλίο σελ. 58)

A.2. δ

B.1. $\alpha \rightarrow$ λάθος

$\beta \rightarrow$ λάθος

$\gamma \rightarrow$ σωστό

B.2. α

Ζήτημα 2^ο

$$\alpha) 5\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow 5(2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 5 - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 14\sigma\upsilon\nu\alpha - 12 = 0 \Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 7\sigma\upsilon\nu\alpha - 6 = 0$$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu\alpha = \psi$ **(1)** τότε η εξίσωση γίνεται

$$5\psi^2 - 7\psi - 6 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \Delta = 49 + 120 = 169 \\ \psi_{1,2} = \frac{7 \pm 13}{10} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \psi = 2 \\ \psi = -\frac{3}{5} \end{array}$$

άρα **(1)** $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = 2$ **ΑΔΥΝΑΤΗ**

και **(1)** $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$

β) Αφού $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$ και $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ έχουμε:

$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \pm \frac{4}{5} \quad \left| \Rightarrow \eta\mu\alpha = -\frac{4}{5} \right.$$

$$\text{και αφού } \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\alpha < 0$$

άρα

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

Ζήτημα 3°

$$\alpha) \alpha_3 = \alpha_1 + (3-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega \Leftrightarrow \log 125 = \alpha_1 + 2\log 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = \log 125 - 2\log 5^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \log 125 - \log 5^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \log \frac{125}{25} \Leftrightarrow \alpha_1 = \log 5 = \omega$$

β) $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29} = S_{29} - S_{20}$, όπου S_{29} , S_{20} το άθροισμα των 29 και 20 αντίστοιχα πρώτων όρων της παραπάνω Α.Π.

$$\begin{aligned} \text{άρα } A &= \frac{29}{2}[2\alpha_1 + (29-1)\omega] - \frac{20}{2}[2\alpha_1 + (20-1)\omega] \\ A &= 29\alpha_1 + 406\omega - 20\alpha_1 - 190\omega \\ A &= 9\alpha_1 + 216\omega \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} A = 225\omega \Leftrightarrow A = 225\log 5 \end{aligned}$$

γ) Η γεωμετρική πρόοδος (β_v) έχει $\beta_1 = \alpha_1 = \log 5$ και $\beta_2 = \alpha_2 = 2\log 5$

$$\text{Άρα έχει λόγο } \lambda = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2\log 5}{\log 5} = 2$$

$$\text{Άρα ο γενικός της όρος θα είναι } \beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow \beta_v = \log 5 \cdot 2^{v-1}$$

Έτσι το ζητούμενο άθροισμα γίνεται

$$\begin{aligned} B &= \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001} = \\ &= \log 5 + \log 5 \cdot 2^2 + \log 5 \cdot 2^4 + \dots + \log 5 \cdot 2 + \log 5 \cdot 2^{2000} \Leftrightarrow \\ B &= \log 5 (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{1998} + 2^{2000}) \quad (1) \end{aligned}$$

Το άθροισμα $S = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{1998} + 2^{2000}$ είναι άθροισμα όρων Γ.Π. με πρώτο όρο $\gamma_1 = 1$ και λόγο $\lambda' = 2^2 = 4$ με πλήθος $v = \frac{2000}{2} + 1 = 1001$ άρα:

$$S = \gamma_1 \cdot \frac{\lambda'^v - 1}{\lambda' - 1} = 1 \cdot \frac{4^{1001} - 1}{4 - 1} \Leftrightarrow S = \frac{4^{1001} - 1}{3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Leftrightarrow B = \log 5 \cdot \frac{4^{1001} - 1}{3} \Leftrightarrow B = \log 5 \cdot \frac{2^{2002} - 1}{3}$$

Ζήτημα 4°

Α) Αφού $Q(t)$ είναι η τιμή του προϊόντος σε εκατοντάδες χιλιάδες t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος

Άρα η αρχική τιμή θα είναι $Q(0)=3$ και μετά από 6 μήνες $=\frac{1}{2}$ έτους το

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{Q(0)}{2} = \frac{3}{2} \text{ Αφού } \ln Q(t) = \alpha t + \beta, t \geq 0 \text{ (1) θα έχω}$$

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \\ (1) \Rightarrow \ln Q(0) = \beta \\ t=\frac{1}{2} \\ (1) \Rightarrow \ln Q\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \beta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} = \frac{\alpha}{2} + \beta \Leftrightarrow \ln 3 - \ln 2 = \frac{\alpha}{2} + \ln 3 \Leftrightarrow \alpha = -2 \ln 2 \Leftrightarrow \alpha = -\ln 4$$

$$\text{άρα (1)} \Rightarrow \ln Q(t) = \alpha t + \beta \stackrel{\text{op}}{\Leftrightarrow} Q(t) = e^{\alpha t + \beta} \Leftrightarrow Q(t) = e^{-\ln 4 t + \ln 3} \Leftrightarrow Q(t) = e^{-\ln 4 t} \cdot e^{\ln 3} \Leftrightarrow Q(t) = (e^{\ln 4})^{-t} \cdot e^{\ln 3} \Leftrightarrow Q(t) = 4^{-t} \cdot 3, t \geq 0$$

β) Πρέπει

$$Q(t) = \frac{1}{16} Q(0) \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} = \frac{1}{16} \cdot 3 \Leftrightarrow 4^{-t} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^{-t} = 4^{-2} \stackrel{(1-1)}{-t} = -2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ χρόνια}$$

$$\gamma) \text{ Πρέπει } Q(t) \leq \frac{Q(0)}{9} \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{3}{9} \Leftrightarrow 4^{-t} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 4^{-t} \leq 3^{-2} \stackrel{e>1(\uparrow)}{\Leftrightarrow}$$

$$-t \ln 4 \leq -2 \ln 3 \Leftrightarrow t \geq \frac{-2 \ln 3}{-\ln 4} \Leftrightarrow t \geq \frac{2 \ln 3}{2 \ln 2} \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} \text{ άρα } t_{\min} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Επιμέλεια: Αντωνιάδης Ανδρέας, Μαθηματικός