

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Μονάδες 6,5

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω πολώνυμο $P(x)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ και $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \rho$, τότε:

α. $P(x) = (x - \rho) \pi(x) + 1$

β. $\pi(x) = (x - \rho) P(x)$

γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 6

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το -3 .

Μονάδες 6

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$

β. $x - 1$

γ. x

δ. $x + \frac{5}{4}$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη γωνία α ισχύει ότι

$$5 \sin 2\alpha - 14 \sin \alpha - 7 = 0 .$$

α. Να δείξετε ότι $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$, $\sin 2\alpha$ και $\epsilon\phi 2\alpha$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) είναι ίσος με $\alpha_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$.

α. Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω .

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{29}$.

Μονάδες 8

γ. Έστω (β_n) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \alpha_1$ και $\beta_2 = \alpha_2$, όπου α_1 και α_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = \alpha t + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε:

α. να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$,

Μονάδες 10

β. να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με $1/16$ της αρχικής του τιμής,

Μονάδες 8

γ. να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $1/9$ της αρχικής του τιμής.

Μονάδες 7