

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤ

ΘΕΜΑ 1

A.1. Απόδειξη θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελ.147 (iii) και (iv)

A.2. Σωστή απάντηση το β. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$

B.1. Αφού $7 \mid (\alpha+5)$ τότε $\alpha+5=7\kappa \Rightarrow \alpha=7\kappa-5$

Επίσης $7 \mid (40-\beta)$ άρα $40-\beta=7\lambda \Rightarrow \beta=40-7\lambda$

Επομένως $\alpha+\beta=7(\kappa-\lambda)+35=7(\kappa-\lambda+5)$ δηλαδή $7 \mid (\alpha+\beta)$

Σωστή απάντηση το α.

B.2.

$$\begin{array}{r|l} 112 & 72 \\ 40 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 40 \\ 32 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 32 \\ 8 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 8 \\ 0 & 4 \end{array}$$

Άρα $(112, 72) = (72, 40) = (40, 32) = (32, 8) = 8$ ο Μ.Κ.Δ. των 72 και 112 είναι ο 8.

B.3. Από τις προηγούμενες διαιρέσεις έχουμε:

$$112 = 72 \cdot 1 + 40 \Leftrightarrow 40 = 112 - 72 \cdot 1$$

$$72 = 40 \cdot 1 + 32 \Leftrightarrow 32 = 72 - 40 \cdot 1$$

$$40 = 32 \cdot 1 + 8 \Leftrightarrow 8 = 40 - 32 \cdot 1$$

$$\text{Έτσι έχουμε: } 8 = 40 - 32 = 40 - (72 - 40) = 2 \cdot 40 - 72 = 2(112 - 72) - 72 = 2 \cdot 112 - 3 \cdot 72$$

$$\text{Δηλαδή } 8 = 2 \cdot 112 - 3 \cdot 72$$

ΘΕΜΑ 2

$$\alpha. \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \beta. \text{ Το } |\vec{u}|^2 &= |2\vec{a} + 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{a} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{a}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \\ &= 4 \cdot 1^2 + 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 1 = 52 \text{ Δηλαδή } |\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\text{όμοια το } |\vec{v}|^2 = |\vec{a} - 2\vec{\beta}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1^2 + 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1 = 13$$

$$\text{δηλαδή } |\vec{v}| = \sqrt{13}$$

$$\gamma. \vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} + 3\vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2 \cdot 1^2 - 1 - 6 \cdot 2^2 = -23$$

$$\delta. \text{ Το συν}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$$

ΘΕΜΑ 3

(α). Η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$ γίνεται $(x^2 + 6x + 9) - y^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x+3)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3+y)(x+3-y) = 0$

Επομένως $x+y+3=0$ ή $x-y+3=0$

Συνεπώς έχουμε τις ευθείες:

$\varepsilon_1: x+y+3=0$, $\varepsilon_2: x-y+3=0$

(β). Οι συντελεστές των παραπάνω ευθειών είναι:

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{1} = -1, \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{-1} = 1 \text{ και το } \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \text{ Δηλαδή } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

(γ). Αν το διάνυσμα $\vec{v} \parallel \varepsilon_1$ τότε το $\vec{v} = (1, -1)$ και $\vec{u} \parallel \varepsilon_2$ οπότε: $\vec{u} = (-1, -1)$

*Εστω $\vec{\alpha} \parallel \varepsilon_1$ οπότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{v}$ δηλαδή $\det(\vec{\alpha}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & \kappa \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -3 \text{ απορρίπτεται γιατί } \kappa > 0$$

*Εστω $\vec{\alpha} \parallel \varepsilon_2$, οπότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{u}$ δηλαδή $\det(\vec{\alpha}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & \kappa \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -3 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3 \text{ δεκτή}$$

Επίσης $\vec{\beta} \parallel \varepsilon_1$ δηλαδή $\vec{\beta} \parallel \vec{v}$ άρα $\det(\vec{\beta}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -16 & 4\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ δεκτή.}$$

Συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $M(3, 4)$

δ. Η εξίσωση της ζητούμενης παραβολής είναι της μορφής $y^2 = 2px$, αφού διέρχεται από το σημείο $M(3, 4)$ ισχύει:

$$4^2 = 2p \cdot 3 \Leftrightarrow p = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \text{ Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι: } y^2 = \frac{16}{3} \cdot x$$

ΘΕΜΑ 4

Α. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ έχει $A=6\mu$, $B=8\lambda$ και $\Gamma=0$. Για να εκφράζει κύκλο αρκεί: $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Οπότε $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (6\mu)^2 + (8\lambda)^2 - 4 \cdot 0 = 36\mu^2 + 64\lambda^2 > 0$ Άρα για κάθε $\mu, \lambda \in \mathbb{R}^*$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο, ο οποίος για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων αρκεί το $(0,0)$ να επαληθεύει την εξίσωση του. Οπότε: $0^2 + 0^2 + 6\mu \cdot 0 + 8\lambda \cdot 0 = 0$ ισχύει.

B. α) Το κέντρο του παραπάνω κύκλου είναι το $K \left(-\frac{6\mu}{2}, -\frac{8\lambda}{2} \right)$ δηλαδή $K(-3\mu, -4\lambda)$ και

$$\text{ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{36\mu^2 + 64\lambda^2}}{2} = \frac{2\sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}}{2} = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}$$

Έστω (x, y) οι συντεταγμένες των κέντρων, άρα: $x = -3\mu \Leftrightarrow \mu = -\frac{x}{3}$

$$y = -4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{y}{4} \text{ αφού } 3\mu + 2\lambda = 0 \text{ τότε: } 3\left(-\frac{x}{3}\right) + 2\left(-\frac{y}{4}\right) = 0 \text{ δηλαδή } 2x + y = 0$$

Άρα τα κέντρα όλων των κύκλων είναι πάνω στην ευθεία $2x + y = 0$ που επειδή ισχύει $2 \cdot 0 + 0 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Από τη σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$ έχουμε $\mu = -\frac{2}{3}\lambda$. Οπότε η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 4\lambda x + 8\lambda y = 0$$

Οι συντεταγμένες των A και B είναι λοιπόν οι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ y = -x - 2 \end{cases} \text{ Με αντικατάσταση γίνεται}$$

$$\begin{cases} x^2 + (-x - 2)^2 - 4\lambda x + 8\lambda(-x - 2) = 0 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2 - 6\lambda)x + 2 - 8\lambda = 0 \\ y = -x - 2 \end{cases}$$

Η δευτεροβάθμια το συστήματος έχει λύσεις, αφού $\Delta > 0$, τις x_1, x_2 . Οπότε $y_1 = -x_1 - 2$, $y_2 = -x_2 - 2$. Άρα $A(x_1, -x_1 - 2)$ και $B(x_2, -x_2 - 2)$. Αφού $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ διανύσματα θέσης των A, B ισχύει:

$$\vec{OA} = (x_1, -x_1 - 2) \text{ και } \vec{OB} = (x_2, -x_2 - 2)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + (-x_1 - 2)(-x_2 - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 \cdot x_2) + (x_1 + x_2) + 2 = 0 \text{ Από τους τύπους του Vieta γίνεται:}$$

$$2 - 8\lambda - 2 + 6\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Επομένως το } \mu = -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}$$

γ) Στο ερώτημα (β) αν αντικαταστήσουμε στη δευτεροβάθμια του συστήματος το $\lambda = 1$ έχουμε ότι: $x_1 = 2 + \sqrt{10}$ και $y_1 = -4 - \sqrt{10}$, $x_2 = 2 - \sqrt{10}$ και $y_2 = -4 + \sqrt{10}$

$$\text{Άρα } \vec{OA} = (2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10}), \vec{OB} = (2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$$

Οπότε:

$$E_{AOB} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{OA}, \vec{OB}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 + \sqrt{10} & -4 - \sqrt{10} \\ 2 - \sqrt{10} & -4 + \sqrt{10} \end{vmatrix} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| -8 + 2\sqrt{10} - 4\sqrt{10} + 10 + 8 - 4\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - 10 \right| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{10} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μον.}$$

Εναλλακτική λύση για το 4^ο θέμα Β. β, γ

β. Αφού γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α, Β, Ο ανήκουν στον κύκλο και επίσης $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ$, τότε η ΑΟΒ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Δηλαδή η ΑΒ είναι διάμετρος.

Επομένως η $x+y+2=0$ που διέρχεται από τα Α, Β θα διέρχεται από το κέντρο Κ(-3μ, -4λ) του κύκλου.

Δηλαδή ισχύει: $-3\mu - 4\lambda + 2 = 0$

$$\text{Άρα } \begin{cases} 3\mu + 4\lambda = 2 \\ 3\mu + 2\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 2 \\ \mu = -\frac{2}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

γ. Το ύψος του τριγώνου ΑΟΒ είναι ίσο με:

$$d(O, AB) = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (\text{Η εξίσωση της ΑΒ είναι η ευθεία } x+y+2=0).$$

$$\text{Η βάση ΑΒ του } \triangle AOB \text{ είναι ίση με } 2\rho = 2 \cdot \sqrt{9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = 2\sqrt{4+16} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{Δηλαδή } E_{AOB} = \frac{1}{2} (OA)(AB) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μον.}$$

Επιμέλεια: Τζιώτζιος Αθανάσιος, Μαθηματικός