

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .

Μονάδες 4

β. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta + \gamma)$.

Μονάδες 4

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και ν το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha, \beta) < (\beta, \nu)$

β. $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu)$

γ. $(\alpha, \beta) > (\beta, \nu)$

δ. $(\alpha, \beta) = (\beta, \nu) + 1$

όπου (α, β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β .

Μονάδες 4,5

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν $7 \mid (\alpha + 5)$ και $7 \mid (40 - \beta)$ τότε:

α. $7 \mid (\alpha + \beta)$,

β. $7 \mid (\alpha + \beta + 1)$,

γ. $7 \mid (\alpha + \beta + 2)$,

δ. $7 \mid (\alpha + \beta - 3)$.

Μονάδες 4

B.2. Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

B.3. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

Μονάδες 8

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε ένα σημείο $M(\kappa, \lambda)$ με $\kappa > 0$ και $\lambda > 0$ τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O , άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο M .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

- A.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 7

- B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

- α.** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

- β.** Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Μονάδες 6

- γ.** Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB .

Μονάδες 6