

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - p$ είναι:

$$P(x) = (x - p)\pi(x) + u(x)$$

Επειδή ο $x - p$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο $u(x)$ θα είναι σταθερό πολυώνυμο u .

$$\text{Άρα: } P(x) = (x - p)\pi(x) + u$$

Για $x = p$ παίρνουμε: $P(p) = (p - p)\pi(p) + u = 0 + u = u$

$$\text{οπότε } u = P(p)$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $x - p$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = p$.

B. α. Σ

β. Λ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Λ

Γ. α. Μια ακολουθία α_n λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού ω . Δηλαδή: $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega$.

β. Μια ακολουθία α_n λέγεται γεωμετρική πρόοδος αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε με μηδενικό αριθμό λ . Δηλαδή: $\alpha_{n+1} = \alpha_n \cdot \lambda$ με $\lambda \neq 0$ και $\alpha_1 \neq 0$.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Αφού $\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} = \frac{\text{συν}2\alpha + 1}{2} = \text{συν}^2\alpha = \alpha_2$ τότε οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Η διαφορά της προόδου είναι:

$$\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha$$

$$\gamma. S_5 = \frac{2\alpha_1 + (5-1)\omega}{2} \cdot 5 = \frac{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 4\eta\mu^2\alpha}{2} \cdot 5 = \frac{2(1 - 2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu^2\alpha)}{2} \cdot 5 = 5$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Αφού $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \kappa\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - (\kappa + \lambda)\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 &= 7 \\ \kappa(-1)^3 - (\kappa + \lambda)(-1)^2 + \lambda(-1) + 1 &= 23 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -\frac{\kappa}{8} - \frac{\kappa + \lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} &= 6 \\ -\kappa - \kappa - \lambda - \lambda &= 22 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -\kappa - 2\kappa - 2\lambda - 4\lambda &= 48 \\ -2\kappa - 2\lambda &= 22 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -3\kappa - 6\lambda &= 48 \\ -\kappa - \lambda &= 11 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \kappa + 2\lambda &= -16 \\ -\kappa - \lambda &= 11 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \lambda &= -5 \\ \kappa &= -6 \end{aligned} \right\}$$

β. Για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$ τότε έχουμε: $P(x) = -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1$.

Επομένως η διαίρεση είναι:

$$\begin{array}{r|l} -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 & 2x + 1 \\ \underline{6x^3 + 3x^2} & \\ 14x^2 - 5x + 1 & \\ \underline{-14x^2 - 7x} & \\ -12x + 1 & \\ \underline{12x + 6} & \\ 7 & \end{array}$$

Δηλαδή η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$-6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 = (2x + 1) \cdot (-3x^2 + 7x - 6) + 7$$

γ. Για $\kappa = -6$ και $\lambda = -5$ η ανίσωση $P(x) > 7$ δίνει:

$$\begin{aligned}
 -6x^3 + 11x^2 - 5x + 1 &> 7 \Leftrightarrow \\
 (2x+1)(-3x^2 + 7x - 6) + 7 &> 7 \Leftrightarrow \\
 (2x+1)(-3x^2 + 7x - 6) &> 0
 \end{aligned}$$

Όμως το $-3x^2 + 7x - 6 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta < 0$ και $\alpha = -3 < 0$ οπότε η ανίσωση γίνεται: $2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1/2$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Πρέπει: $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0$ και επειδή $e^x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε

$e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0$ και επειδή η e^x είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Άρα πεδίο ορισμού της f: $A_f = (0, +\infty)$.

β.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 2 \ln 2 &\Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = \ln 2^2 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 4e^x + 20 \Leftrightarrow \\
 e^{2x} - 4e^x - 21 &= 0
 \end{aligned}$$

Θέτω $e^x = \omega > 0$ τότε $\omega^2 - 4\omega - 21 = 0$ άρα $\begin{cases} \omega = 7 \\ \text{ή} \\ \omega = -3 \text{ απορ.} \end{cases}$

Δηλαδή $\omega = 7 \Leftrightarrow e^x = 7 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$. Δεκτή

γ. $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 1$ και επειδή $e^x + 5 > 0$

έχουμε $e^{2x} - 1 > e^x + 5 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 6 > 0 \Leftrightarrow (e^x + 2)(e^x - 3) > 0$ και επειδή

$e^x + 2 > 0$ τότε $e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow e^x > 3 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$

Άρα $x > \ln 3$ αφού $3 > 1 \Leftrightarrow \ln 3 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 3 > 0$.