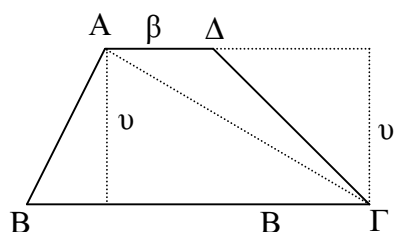


ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^ο



A1. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$) με βάσεις $A\Delta = \beta$, $B\Gamma = B$ και ύψος υ . Φέρουμε διαγώνιο AG . Τότε:

$$E = (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta) \quad (1)$$

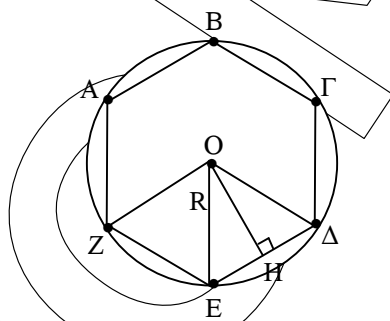
Αλλά τα $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ έχουν ίδιο ύψος υ και βάσεις B, β αντίστοιχα.

$$\text{Άρα } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} B \cdot \upsilon \text{ και } (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow E = \frac{1}{2} B \cdot \upsilon + \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} (B + \beta) \cdot \upsilon$$

- A2.** α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

B.



α. Σε κανονικό εξάγωνο η κεντρική γωνία $\omega_6 = \frac{360}{6} = 60^\circ$

Το $OE\Delta$ ισοσκελές ($OE = O\Delta = R$) με $\angle E\Delta = 60^\circ$, άρα

$$\square OE\Delta \text{ ισόπλευρο} \Rightarrow E\Delta = \lambda_6 = R$$

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEH με πυθαγόρειο θεώρημα

$$OE^2 = OH^2 + EH^2 \Rightarrow R^2 = \alpha_6^2 + \left(\frac{\lambda_6}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \alpha_6^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow \alpha_6^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} \Rightarrow \alpha_6^2 = \frac{3R^2}{4} \Rightarrow \alpha_6 = \frac{\sqrt{3}R}{2}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha. \quad 2\mu\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2 \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - 2\beta\gamma = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\beta\gamma = 2\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \alpha^2 \quad (1)$$

$$\beta. \quad \text{Από Ν.Σ: } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sin A \xrightarrow{(1)} \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin A = \frac{1}{2} \quad \text{άρα } A = \frac{\pi}{3}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$\alpha.$ Η $\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ$ βαίνει σε ημπεριφέρεια.

$$\text{Επειδή } \widehat{B} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A\Gamma} = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Gamma = R$$

$\beta.$ Τα τρίγωνα $PA\Gamma$, $PB\Gamma$ είναι όμοια. Διότι: είναι ορθογώνια και $\widehat{AP} = \widehat{AB\Gamma}$ (πλευρές κάθετες).

$$\text{Ο λόγος ομοιότητας είναι } \lambda = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = 2$$

$$\text{Άρα } \frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = \lambda^2 = (2)^2 = 4$$

$$\gamma. \quad \text{Στο ορθογώνιο } B\Gamma P \text{ έχουμε } \widehat{B} = 30^\circ \text{ άρα } P\Gamma = \frac{BP}{2} \Leftrightarrow BP = 2P\Gamma \quad (1)$$

$$\text{Από Π.Θ.: } P\Gamma^2 + B\Gamma^2 = BP^2 \xrightarrow{(1)} P\Gamma^2 + (2R)^2 = (2P\Gamma)^2$$

$$3P\Gamma^2 = 4R^2 \Leftrightarrow P\Gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Η πλευρά του τετραγώνου ΘΗΖΕ υπολογίζεται με π.θ.:

$$\Theta H^2 = \Theta \Delta^2 + \Delta H^2 \Leftrightarrow \Theta H^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \Theta H^2 = 25 \Leftrightarrow \Theta H = 5$$

$$\text{Άρα } (\Theta H Z E) = 25$$

β. $(EBZ) = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BZ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

Όμως $E = \tau \cdot \rho$

$$\tau = \frac{5+3+4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \left. \vphantom{\tau = \frac{5+3+4}{2} = \frac{12}{2} = 6} \right\} 6 = 6 \cdot \rho \Leftrightarrow \rho = 1$$

γ. Για την ακτίνα R είναι $2R = HZ = 5 \Leftrightarrow R = \frac{5}{2}$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi R^2}{\pi \rho^2} = \frac{\frac{25}{4}}{1} = \frac{25}{4}$$

Επιμέλεια: Ανδρέας Αντωνιάδης, Δημήτρης Μανωλόπουλος,
Στέφανος Νταφόπουλος - Μαθηματικοί