

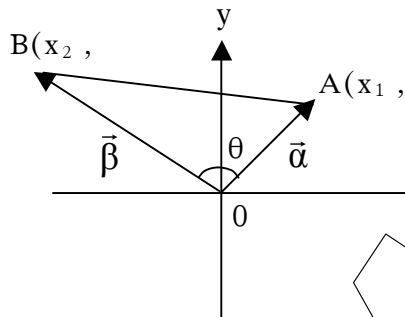
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.

- Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \varphi$ όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

B.



Με αρχή το 0 παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{OB} = \vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Από το νόμο των συνημίτονων στο τρίγωνο OAB έχουμε: $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA) \cdot (OB) \cdot \cos \theta$, ισχύει και όταν O, A, B είναι συνευθειακά.

Όμως είναι $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
 $(OA)^2 = x_1^2 + y_1^2$ και $(OB)^2 = x_2^2 + y_2^2$

Άρα έχουμε διαδοχικά

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2 \cdot (OA) \cdot (OB) \cdot \cos \theta$$

και επειδή $(OA) \cdot (OB) \cdot \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{\beta}$ έχουμε τελικά $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$

Γ. α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Σωστό

Δ. α. 2

β. 3

γ. 1
δ. 6

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Έστω $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\beta=2\lambda+1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ δύο περιττοί ακέραιοι
 $\alpha \cdot \beta = (2\kappa+1)(2\lambda+1) = 4\kappa\lambda + 2\kappa + 2\lambda + 1 =$
 $= 2(2\kappa\lambda + \kappa + \lambda) + 1$ αλλά $2\kappa\lambda + \kappa + \lambda = \mu \in \mathbb{Z}$
Άρα $\alpha \cdot \beta = 2 \cdot \mu + 1$ περιττός ακέραιος

B. α ακέραιος. Οι δυνατές μορφές του α στην διαίρεσή του με 2 είναι:
 $\alpha=2\kappa$ ή $\alpha=2\kappa+1$, κ ακέραιος

• Αν $\alpha=2\kappa$ τότε $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{2\kappa \cdot (4\kappa^2+1)}{2} = \kappa \cdot (4\kappa^2+1)$ που είναι ακέραιος.

• Αν $\alpha=2\kappa+1$ τότε $\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{(2\kappa+1)[(4\kappa^2+4\kappa+1)+1]}{2} =$
 $\frac{(2\kappa+1) \cdot (4\kappa^2+4\kappa+2)}{2} = \frac{(2\kappa+1) \cdot 2 \cdot (2\kappa^2+2\kappa+1)}{2} = (2\kappa+1) \cdot (2\kappa^2+2\kappa+1)$
 $\in \mathbb{Z}$, αφού είναι πρόσθεση και γινόμενο ακεραίων

Γ. Αν α περιττός ακέραιος τότε $\alpha=2\kappa+1$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ οπότε
 $\frac{\alpha \cdot (\alpha^2+1)}{2} = (2\kappa+1) \cdot [(2\kappa^2+2\kappa)+1] = (2\kappa+1) \cdot [2(\kappa^2+\kappa)+1] = (2\kappa+1) \cdot (2\lambda+1)$

(με $\lambda = \kappa^2 + \kappa \in \mathbb{Z}$), που είναι γινόμενο περιττών ακεραίων, οπότε σύμφωνα με Α ερώτημα είναι περιττός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. $y^2=4x$ είναι της μορφής $y^2=2 \cdot p \cdot x$ άρα $2p=4 \Rightarrow p=2$ οπότε
 $E = \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (1, 0)$ και η διευθετούσα είναι $\delta: x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $x = -1$

B. Από την εστία της παραβολής διέρχονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x=1$ και οι
 $y-0=\lambda(x-1)$ ή $y=\lambda x - \lambda$ ή $\varepsilon_2: \lambda x - y - \lambda = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Το $O(0,0)$ απέχει από την $x=1$ απόσταση 1 άρα δεν είναι λύση του προβλήματος.

- $d(0, \varepsilon_2) = \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$ είναι
 $\frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 2\lambda^2 + 2 \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_2): x - y - 1 = 0 \text{ ή } (\varepsilon'_2): -x - y + 1 = 0 \text{ δηλαδή}$$

$$(\varepsilon_2): y = x - 1, \quad (\varepsilon'_2): y = -x + 1$$

Γ. Αν $M(x_1, y_1) \neq 0(0,0)$ το σημείο επαφής τότε η εξίσωση της εφαπτομένης σ' αυτό είναι

$$y \cdot y_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow y \cdot y_1 = 2x + 2x_1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1}$$

και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{2}{y_1}$ και επειδή είναι παράλληλη στην

$$y = x - 1 \text{ που έχει συντελεστή } 1 \text{ θα ισχύει } \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2$$

$$\text{Όμως το } M \text{ ανήκει στην παραβολή } \Rightarrow y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 4 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$\text{Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } 2y = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Έχουμε: $A = -2\cos\theta$, $B = -2\eta\mu\theta$, $\Gamma = -1$ οπότε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 \cdot \cos^2\theta + 4\eta\mu^2\theta + 4 = 4 \cdot (\cos^2\theta + \eta\mu^2\theta) + 4 = 4 \cdot 1 + 4 = 8 > 0 \text{ Άρα είναι εξίσωση κύκλου}$$

- Το κέντρο του είναι το $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{-2\cos\theta}{2}, -\frac{-2\eta\mu\theta}{2}\right) = (\cos\theta, \eta\mu\theta)$

- Η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Β. 1^{ος} τρόπος

$$\text{Αν } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ τότε το κέντρο του κύκλου είναι το } K\left(\cos\frac{\pi}{2}, \eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) \text{ και}$$

$$\text{η εξίσωση του κύκλου γίνεται } x^2 + y^2 - 2x \cdot 0 - 2y \cdot 1 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

Η εφαπτομένη στο $M(1,2)$ έστω (ε) είναι κάθετη στην ακτίνα KM . Ο

$$\text{συντελεστής της } KM \text{ είναι } \lambda_{KM} = \frac{y_M - y_K}{x_M - x_K} = \frac{2-1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

Άρα ο συντελεστής της (ε) είναι -1 και εξίσωσή της (ε) είναι $y - 2 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 3$

2^{ος} τρόπος

Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ ο κύκλος γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$C: x^2 + (y-1)^2 = 2 \text{ με κέντρο } \kappa(0,1) \text{ ακτίνα } \rho = \sqrt{2} \quad M(1,2) \in C$$

$N(x,y)$ τυχαίο σημείο της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $M(1,2)$ τότε:

$$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{KM} = (1,1), \quad \overrightarrow{MN} = (x-1, y-2)$$

της (1) γίνονται

$$(x-1) \cdot 1 + (y-2) \cdot 1 = 0$$

$$x - 1 + y - 2 = 0$$

$$x + y - 3 = 0$$

$$y = -x + 3$$

Γ. Έστω $K(x,y)$ τα κέντρα των κύκλων τότε:

$$x = \cos \theta \quad \text{τότε } \cos^2 \theta = x^2$$

$$y = \sin \theta \quad \text{τότε } \sin^2 \theta = y^2$$

$$\text{Όμως } \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{Άρα } x^2 + y^2 = 1$$

Άρα τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

Επιμέλεια: Γεώργιος Βλάχος, Δημήτρης Τσόγιας – Μαθηματικοί