

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
Μονάδες 4

B. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.
Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0.$$

γ. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει:
 $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha, \beta] = (\alpha, \beta)$ όπου $[\alpha, \beta]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και (α, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β .

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Δ. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1) .

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	1. $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	2. $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	4. $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακέραιων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο a είναι ακέραιος, τότε και ο $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$ είναι ακέραιος.

Μονάδες 10

Γ. Αν ο a είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

Μονάδες 6

- Β.** τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

- Γ.** την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

- Α.** Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 9

- Β.** Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.

Μονάδες 9

- Γ.** Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 7