

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A) Σελ 95 Σχολικού βιβλίου
B) γ
Γ) β
Δ) α
Ε) α) άθροισμα
β γεωμετρικής
γ) $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 2^ο

- α) 1^{ος} τρόπος: $\sin(\eta\mu 2x + 4\eta\mu x) = (\sin 2x + 4\sin x + 1)\eta\mu x$
 $\Leftrightarrow \sin x \cdot \eta\mu 2x + \sin x \cdot 4\eta\mu x = \sin 2x \cdot \eta\mu x + 4\sin x \cdot \eta\mu x + \eta\mu x$
 $\Leftrightarrow \sin x \cdot \eta\mu 2x - \sin 2x \cdot \eta\mu x = \eta\mu x$
 $\Leftrightarrow \eta\mu(2x - x) = \eta\mu x$
 $\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu x$, ισχύει
- 2^{ος} τρόπος: $\sin(2\eta\mu x \sin x + 4\eta\mu x) = (2\sin^2 x - 1 + 4\sin x + 1)\eta\mu x$
 $\Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sin^2 x + 4\eta\mu x \cdot \sin x = 2\eta\mu x \cdot \sin x + 4\eta\mu x \cdot \sin x$, ισχύει

- β) $\sin 2x + 4\sin x + 1 = 0$
 $2\sin^2 x - 1 + 4\sin x + 1 = 0$
 $2\sin^2 x + 4\sin x = 0$
 $2\sin x(\sin x + 2) = 0$
 $2\sin x(\sin x + 2) = 0$
 $2\sin x = 0$ ή $\sin x + 2 = 0$, αδύνατη
 $\sin x = 0$
 $\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$,
 $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

(Μπορεί να γραφεί και : $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$)

ΘΕΜΑ 3^ο

α) 1^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} \alpha_{v+1} - \alpha_v &= -11 + 2(v+1) - (-11 + 2v) \\ &= -11 + 2v + 2 + 11 - 2v = 2 \end{aligned}$$

Άρα η α_v είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega=2$ και για $v=1$ έχω:

$$\alpha_1 = -11 + 2 \cdot 1 = -11 + 2 = -9$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad S &= \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{21} = S_{21} - S_{11} = \frac{21}{2}(2\alpha_1 + 20\omega) - \frac{11}{2}(2\alpha_1 + 10\omega) = \\ &= \frac{21}{2}(-18 + 40) - \frac{11}{2}(-18 + 20) \\ &= \frac{21}{2} \cdot 22 - \frac{11}{2} \cdot 2 \\ &= 21 \cdot 11 - 11 = 231 - 11 = 220 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρώ αριθμητική πρόοδος β_v με $\beta_1 = \alpha_{12} = 2\alpha_1 + 11\omega = 13$ και $\omega=2$. Το ζητούμενο άθροισμα S είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της β_v .

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } S &= S_{10} = \frac{10}{2}(2\beta_1 + 9\omega) = 5 \cdot (2 \cdot 13 + 9 \cdot 2) = \\ &= 5(26 + 18) = 5 \cdot 44 = 220 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad P(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ &= x^2(x-3) - (x-3) \\ &= (x-3) \cdot (x^2-1) \\ &= (x-3) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \end{aligned}$$

(Η εύρεση των ριζών μπορεί επίσης να γίνει και με το σχήμα Horner)

Άρα οι ρίζες του $P(x)$ είναι : -1 , 1, 3

$$\text{Έχω : } \alpha_v = -1 \Leftrightarrow \alpha_1 + (v-1) \cdot \omega = -1$$

$$\Leftrightarrow -9 + 2(v-1) = -1$$

$$\Leftrightarrow -9 + 2v - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2v = 9 + 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 2v = 10$$

$$\Leftrightarrow v = 5$$

Επομένως διαπιστώνουμε ότι το -1 είναι $5^{\text{ος}}$ όρος της αριθμητικής προόδου α_n .

Η επόμενη ρίζα του $P(x)$, δηλ. το 1 , προκύπτει ως :

$$1 = \alpha_5 + \omega = -1 + 2, \text{ άρα } 1 = \alpha_6$$

$$\text{Ομοίως, } 3 = \alpha_6 + \omega = \alpha_7$$

Άρα οι ρίζες του $P(x)$ είναι διαδοχικοί όροι της συγκεκριμένης αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ 4^ο

α) $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$

Η συνάρτηση f ορίζεται για τα x που ικανοποιούν την: $e^{2x} - 2e^x + 3 > 0$

Θέτω $e^x = \omega$ κι έχω:

$$\omega^2 - 2\omega + 3 > 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

Επομένως το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$, άρα η αρχική συνθήκη ικανοποιείται για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

Η συνάρτηση g ορίζεται για τα x που ικανοποιούν την:

$$e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$

$$e^x > e^0$$

$x > 0$ (αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0, +\infty)$)

β) $f(x) = g(x)$

Πρέπει : $x > 0$ (από α)

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln[3(e^x - 1)]$$

$$e^{2x} - 2e^x + 3 = 3e^x - 3$$

$$e^{2x} - 2e^x + 3e^x + 3 - 3 = 0$$

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

Θέτω $e^x = y$ και η εξίσωση γίνεται: $\omega^2 - 5\omega + 6 = 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$\omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = 3$$

Επομένως: $e^x = 2$ ή $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 2$ ή $x = \ln 3$, δεκτές

$$\gamma) \quad f(x) > 2g(x) \Rightarrow$$

Πρέπει: $x > 0$ (από α)

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > 2[\ln 3 + \ln(e^x - 1)]$$

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > 2\ln 3 + 2\ln(e^x - 1)$$

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln 9 + 2\ln(e^x - 1)$$

$$\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) > \ln[9(e^x - 1)^2]$$

$$e^{2x} - 2e^x + 3 > 9e^{2x} - 18e^x + 9$$

$$e^{2x} - 9e^{2x} - 2e^x + 18e^x + 3 - 9 > 0$$

$$-8e^{2x} + 16e^x - 6 > 0$$

$$2(-4e^{2x} + 8e^x - 3) > 0$$

Θέτω: $e^x = \omega$ και η ανίσωση γίνεται: $-4\omega^2 + 8\omega - 3 > 0$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $\omega_1 = \frac{3}{2}$ και $\omega_2 = \frac{1}{2}$

Άρα η ανίσωση ικανοποιείται για:

$$\frac{1}{2} < \omega < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} < e^x < \frac{3}{2}$$

$$\ln \frac{1}{2} < x < \ln \frac{3}{2}$$

Συναληθεύοντας με τον περιορισμό προκύπτουν οι λύσεις της ανίσωσης για

$$0 < x < \ln \frac{3}{2}$$

Επιμέλεια: Ψωμάς Γεώργιος, Παπαγεωργίου Γεώργιος - Μαθηματικοί

ΡΟΜΒΟΣ