

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θέμα 1°

A. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 45

B. α) σωστό, β) λάθος, γ) σωστό, δ) λάθος

Γ. α) θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$: $\alpha = \kappa \cdot \beta$
β) ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 146

Θέμα 2°

A. Διακρίνουμε για τον α τις περιπτώσεις:

$$\alpha = 2\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 2\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$$

αν $\alpha = 2\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε $\alpha^3 = (2\lambda)^3 = 8\lambda^3 = 8\kappa$ όπου $\kappa = \lambda^3 \in \mathbb{Z}$

αν $\alpha = 2\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{Z}$ τότε

$$\alpha^3 = (2\lambda + 1)^3 = 8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 2(4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda) + 1 = 2\kappa + 1 \text{ όπου } \kappa = 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda \in \mathbb{Z}$$

B. $\alpha(\alpha^2 + 1) = \alpha^3 + \alpha$

αν $\alpha = 2\lambda$ τότε από A: $\alpha^3 = 8\kappa$ άρα

$$\alpha(\alpha^2 + 1) = 8\kappa + 2\lambda = 2(4\kappa + \lambda) = 2\mu: \text{άρτιος όπου } \mu = 4\kappa + \lambda \in \mathbb{Z}$$

αν $\alpha = 2\lambda + 1$ τότε $\alpha^3 = 2\kappa + 1, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\alpha(\alpha^2 + 1) = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2\kappa + 2\lambda + 2 = 2(\kappa + \lambda + 1) = 2\rho \text{ άρτιος όπου } \rho = \kappa + \lambda + 1 \in \mathbb{Z}$$

Θέμα 3°

$$A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2), B(1, 2), \Gamma(2, 3), \lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

A. $A(x, y)$ τυχαίο σημείο

$$\begin{aligned} \text{τότε } \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 3\lambda + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x+1}{2} \\ \lambda = \frac{y-2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{τότε } \frac{y-2}{3} = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow 2y - 4 = 3x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2y + 7 = 0, \text{ παριστάνει ευθεία}$$

(Αν $\lambda = -2$ τότε το σημείο είναι το $A(-5, -4)$ οπότε τα A, B, Γ θα είναι συνευθειακά άτοπο αφού το ABΓ είναι τρίγωνο. Γι' αυτό δίνεται το $\lambda \neq -2$).

B. $\lambda = 1$ τότε $A(1,5)$, $B(1,2)$, $\Gamma(2,3)$

α) $\overrightarrow{AB} = (0, -3)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (1, -2)$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

άρα $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$ τ.μ.

β) $c: (x-1)^2 + (y-5)^2 = \rho^2$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{3-2}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varepsilon_{B\Gamma}: y-2 = 1(x-1) \Leftrightarrow \varepsilon_{B\Gamma}: y = x+1 \Leftrightarrow \varepsilon_{B\Gamma}: x-y+1=0$$

$$\rho = d(A, \varepsilon_{B\Gamma}) = \frac{|1-5+1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

τότε $c: (x-1)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$ δηλαδή

$$c: (x-1)^2 + (y-5)^2 = \frac{9}{2}$$

Θέμα 4^ο

A. Έστω

$$c_1: y^2 = 2p \cdot x$$

$$c_2: 4x^2 + 2y^2 = 3p^2, p > 0 \text{ που παίρνει τη μορφή της έλλειψης:}$$

$$c_2: \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3p^2}{2}} = 1$$

Αφού $\frac{3p^2}{4} < \frac{3p^2}{2}$ τότε έχει τις εστίες της στον $y'y$ άρα $\alpha^2 = \frac{3p^2}{2}, \beta^2 = \frac{3p^2}{4}$

$$\text{τότε } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{3p^2}{2} - \frac{3p^2}{4} = \frac{3p^2}{4} \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\frac{3p^2}{4}} = \frac{|p|\sqrt{3}}{2} \text{ αφού}$$

$$p > 0 \text{ οπότε } |p| = p \text{ άρα } \gamma = \frac{p\sqrt{3}}{2} \text{ άρα οι εστίες είναι: } E' = \left(0, -\frac{p\sqrt{3}}{2}\right), E = \left(0, \frac{p\sqrt{3}}{2}\right)$$

B. $y^2 = 2px, p > 0$

$4x^2 + 2y^2 = 3p^2$ λύνοντας το σύστημά τους, έχουμε:

$$\left. \begin{matrix} y^2 = 2px \\ 4x^2 + 4p\lambda = 3p^2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} y^2 = 2px \\ 4x^2 + 4px - 3p^2 = 0 \end{matrix} \quad (1)$$

$$\Delta_1 = 16p^2 + 48p^2 = 64p^2 = (8p)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-4p \pm 8p}{8} = \begin{cases} \frac{-4p+8p}{8} = \frac{4p}{8} = p/2 \\ \frac{-4p-8p}{8} = \frac{-12p}{8} = -\frac{3p}{2} \end{cases}$$

$$\text{αν } x_1 = p/2 \rightarrow y_1^2 = 2p \cdot p/2 \rightarrow y_1^2 = p^2 \Rightarrow y_1 = p \text{ ή } y_1 = -p$$

άρα σημεία τομής είναι $K(p/2, p)$ $\Lambda(p/2, -p)$

$$\text{αν } x_2 = -3p/2 \rightarrow y_2^2 = 2p(-3p/2) = -3p^2 \text{ αδύνατη}$$

μοναδικά σημεία τομής $K(p/2, p)$ $\Lambda(p/2, -p)$

Γ. η εφαπτομένη της $c_1: y^2 = 2px$ στο $K(p/2, p)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: py = p(x + p/2) \rightarrow \varepsilon_1: y = x + p/2 \text{ αφού } p > 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$$

η εφαπτομένη της c_2 στο $K(p/2, p)$ έχει εξίσωση

$$\text{η εφαπτομένη της } \varepsilon_2: 4\frac{p}{2}x + 2py = 3p^2 \text{ αφού } p > 0$$

$$\text{έχουμε : } \varepsilon_2: x + y - \frac{3p^2}{2} = 0 \rightarrow \lambda_2 = -1 \text{ αφού } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1(-1) = -1 \text{ τότε } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

Επιμέλεια: Δριμιλής Βασίλης, Τσόγιας Δημήτρης - Μαθηματικοί