

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΣΑΒΒΑΤΟ 31 ΜΑΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{\nu}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$, τότε να αποδείξετε ότι
- $$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}.$$

Μονάδες 7

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

- β.** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1 y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

- γ.** Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E(-\gamma, 0), E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Μονάδες 2

- δ.** Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{AB}$ έχουμε

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}.$$

Μονάδες 2

- Γ. α. Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α ;

Μονάδες 5

- β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

- A. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή $\alpha^3 = 8k$ όπου $k \in \mathbb{Z}$ ή $\alpha^3 = 2k+1$ όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 12

- B. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2+1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(2, 3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

- A. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 8

- B. Εάν $\lambda = 1$, να βρείτε:

- α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 8

- β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1, 5)$ και εφάπτεται στην ευθεία $B\Gamma$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:

η παραβολή $y^2 = 2px$, και

η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

- A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της έλλειψης είναι τα σημεία

$$E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right) \text{ και } E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

Μονάδες 8

- Β.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία

$$K \left(\frac{p}{2}, p \right) \text{ και } \Lambda \left(\frac{p}{2}, -p \right).$$

Μονάδες 8

- Γ.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K \left(\frac{p}{2}, p \right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9