

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ – Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

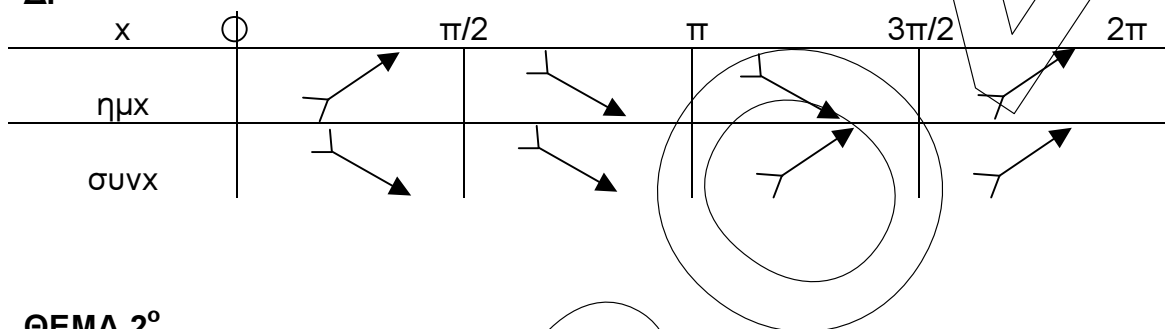
Α. Απόδειξη θεωρίας σχολικού βιβλίου

Β. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ

Γ. α) $\sqrt[m]{a^m} = a^{\frac{m}{m}} = a$ β) $a^{\log_a \theta} = \theta$

γ) $\log_a a^x = x$

Δ.



ΘΕΜΑ 2°

α) $\eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \cdot (2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

άρα $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ή

$2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ή

$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

β) $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{1 - 1 + 2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\eta\mu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} =$
 $= \frac{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}} = \epsilon\phi \frac{\alpha}{2}$

ΘΕΜΑ 3°

α) $x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6$

$-x^4$	$+x^2$	$x^2 - 1$
$-8x^3 + 5\alpha x^2 + 8x - 3\alpha - 6$		$x^2 - 8x + 5\alpha$
$8x^3$	$-8x$	
$5\alpha x^2 - 3\alpha - 6$		
$5\alpha x^2$	5α	
$2\alpha - 6$		

Άρα ισχύει:

$$x^4 - 8x^3 + (5\alpha - 1)x^2 + 8x - 3\alpha - 6 = (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 5\alpha) + 2\alpha - 6$$

β) πρέπει $2\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$

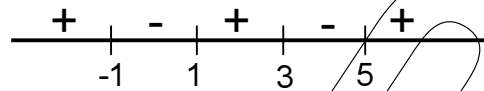
γ) για $\alpha = 3$ έχουμε $P(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$ και από (α) γίνεται:

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 15)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 8x + 15) = 0 \text{ δηλαδή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{ή } x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 5$$

πρέπει $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 5) < 0$



άρα $x \in (-1, 1) \cup (3, 5)$

ΘΕΜΑ 4^ο

A) πρέπει $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \geq 0 \quad (1)$

θέτω $\left(\frac{1}{5}\right)^x = y > 0$ οπότε $(1) \Rightarrow -2y^2 + 3y - 1 \geq 0$ άρα $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

δηλαδή $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} \leq x \cdot \ln \frac{1}{5} \leq 0$ διαιρώ με $\ln \frac{1}{5} < 0$ επομένως :

$$\frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{1}{5}} \geq x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{-\ln 2}{-\ln 5} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\ln 2}{\ln 5}. \text{ Άρα π.ο είναι: } \left[0, \frac{\ln 2}{\ln 5} \right]$$

B) $g(x) + g(x+1) + g(x+2) + \dots + g(x+49) =$

$$= 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + \dots + 5^{x+49} = 5^x + 5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x + \dots + 5^{49} \cdot 5^x =$$

$$= 5^x (1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49}) = 5^x \cdot 1 \frac{5^{50} - 1}{5 - 1} = \frac{5^x (5^{50} - 1)}{4}$$

$$\text{Άρα έχουμε: } \frac{5^x (5^{50} - 1)}{4} = \frac{125(5^{50} - 1)}{4} \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Επιμέλεια: Τζιώτζιος Αθανάσιος , Φώτου Κατερίνα – Μαθηματικοί