

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1°

- A. Θεωρία , σχολ. βιβλίο σελ. 213
 B. α3, β1, γ4
 Γ. Λ Λ Σ Σ

ΘΕΜΑ 2°

α) Είναι: $\Phi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \Rightarrow 150^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v} \Rightarrow \frac{360^\circ}{v} = 30^\circ$
 $\Rightarrow 30^\circ v = 360^\circ \Rightarrow v = 12$

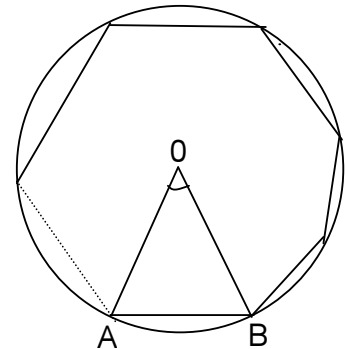
β) $\omega_{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

- γ) Η πλευρά του δωδεκαγώνου είναι λ_{12} . Το 12- γωνο αποτελείται από 12 ίσοσκελή τρίγωνα με $OA=OB=R$ και $\lambda_{12}=AB$ και $\hat{O} = 30^\circ$.

Είναι : $(AOB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \eta\mu\hat{O} = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{4} R^2$

Άρα το εμβαδό του 12 -γώνου είναι

$E = 12 \cdot (AOB) = 12 \cdot \frac{1}{4} R^2 = 3R^2$



ΘΕΜΑ 3°

$\gamma=2, \quad \beta=1+\sqrt{2}, \quad (AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$

α) Είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta\gamma \eta\mu A \Rightarrow \beta\gamma \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \beta\gamma \eta\mu A \Rightarrow \eta\mu A = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$

Από τον νόμο συνημιτόνων έχουμε:

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A \Rightarrow \alpha^2 = (1+\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(1+\sqrt{2}) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 - 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$

$$\beta) \text{ Είναι: } (AB\Gamma) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Rightarrow \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\alpha}{R} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

γ) Από την γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\Delta B \Rightarrow (1+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \Delta B \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 4 - 2\sqrt{3}\Delta B \Rightarrow 2\sqrt{2} - 4 = -2\sqrt{3}\Delta B \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta B = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = R^2 + 3R^2 \Rightarrow B\Gamma^2 = 4R^2 \Rightarrow B\Gamma = 2R$$

β) Στο ορθ. Τρίγωνο ABΓ είναι: BΓ=2R και AB=R, δηλ. $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $\hat{A}\hat{B}\hat{B} = 30^\circ$. Οπότε: $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

γ) Η διάκεντρος BΓ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΔ. Άρα στο ισοσκελές ΑΒΔ είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$

Άρα $A\Delta = \lambda_3 = R\sqrt{3}$ (στον κύκλο (B,R))

Το ABΓΔ έχει κάθετες διαγώνιες, άρα:

$$(AB\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} 2R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$$

δ) Το κυκλικό τμήμα E_1 είναι: $E_1 = \text{τομέας (BA}\hat{\Delta}) - (AB\Delta)$

$$\text{Έχουμε: } \text{τομέας (BA}\hat{\Delta}) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\text{και: } (AB\Delta) = \frac{1}{2} AB \cdot B\Delta \cdot \eta\mu(\hat{A}\hat{B}\hat{D}) = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 120^\circ = \frac{1}{2} R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Άρα: } E_1 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Το κυκλικό τμήμα E_2 είναι: $E_2 = \text{τομέας (A}\hat{\Gamma}\hat{D}) - (A\Gamma\Delta)$

Η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι $\widehat{A\Gamma\Delta} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$

Έτσι: τομέας $(\Gamma\Delta\Delta) = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2 \cdot 3 \cdot 60^\circ}{360} = \frac{\pi R^2}{2}$ και

$$(\Delta\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot \Gamma\Delta \cdot \eta\mu(\widehat{\Delta\Gamma\Delta}) = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} 3R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Άρα: } E_2 = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Το ζητούμενο εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων είναι:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \Rightarrow \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\pi R^2}{3} + \frac{\pi R^2}{2} - R^2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2\pi R^2}{6} + \frac{3\pi R^2}{6} - \frac{6R^2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{5\pi R^2}{6} - \frac{6R^2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{R^2}{6} (5\pi - 6\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Επιμέλεια: Παπαγεωργίου Γιώργος, Ψωμάς Γιώργος – Μαθηματικοί