ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2010

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 304

Α.2 Θεωρία

Α.3 Θεωρία

Α.4
α – Σωστό
β – Σωστό
γ – Λάθος
δ – Λάθος
ε – Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β.1

$$z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$$

Δ=4 – 8 = - 4<0

Άρα $z_{1,2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}\left\langle\begin{matrix} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{matrix}\right.$

Β.2

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=$$
$$=(2i)^{1005}-(2i)^{1005}=0$$

Β.3

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2|$$
$$|w-4+3i|=|(1+i)-(1-i)|$$
$$|w-4+3i|=|2i|$$
$$|w-4+3i|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του w είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(4, -3) και R=2

$$|w|=|w-4+3i+4-3i|$$

Άρα $\big||w-4+3i|-|4-3i|\big|\le|w|\le|w-4+3i|+|4-3i|$

$$|2-5|\le|w|\le 2+5$$
$$3\le|w|\le 7$$

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=2x+\ln(x^2+1) \quad x\in R$

Γ.1

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}$$

Παρατηρώ ότι f΄(x)>0 για κάθε $x \in R$ άρα f γνησίως αύξουσα στο R

Γ.2

$$2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \ln\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}$$

$$2x^2 - 6x + 4 = \ln\left[(3x-2)^2+1\right] - \ln\left(x^4+1\right) = 2x^2 + \ln\left(x^4+1\right) = 2(3x-2) + \ln\left[(3x-2)^2+1\right]$$

Άρα $f(x^2) = f(3x - 2) \xleftrightarrow{f\ 1-1} x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \ \left\langle \begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix} \right.$

Γ.3

$$f''(x) = \frac{(4x+2)\left(x^2+1\right) - 2x\left(2x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^3 + 4x + 2x^2 + 2 - 4x^3 - 4x^2 - 4x}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f΄(x) = 0 \Leftrightarrow -2\left(x^2-1\right) = 0 \ \left\langle \begin{matrix} x = -1 \\ x = 1 \end{matrix} \right.$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} > 0$ με ρίζες -1, 1

	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f΄΄		-	O	+	O	-	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	
			Σ.Κ		Σ.Κ		

Σ.Κ f(-1) = -2 + ln2

Σ.Κ f(1) = 2 + ln2

Σημεία καμπής

Α(-1, -2+ln2)

Β(1, 2+ln2)

(ε_A) ψ – f(-1)=f΄(-1)(x+1) $\Leftrightarrow$ ψ – (-2+ln2)=1(x+1)

Άρα ψ=x + ln2 – 1

(ε_B) ψ – f(1)=f΄(1)(x-1) $\Leftrightarrow$ ψ – (2+ln2)=3(x-1)

Άρα ψ=3x – 1+ ln2

Τέμνουν τον ψψ΄ στο σημείο Μ(0, -1 + ln2)

Γ.4 $I = \int_{-1}^{1} x\left[2x + \ln\left(x^2+1\right)\right]dx = \int_{-1}^{1} 2x^2 dx + \int_{-1}^{1} x\ln\left(x^2+1\right)dx \quad (1)$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} x \ln\left(x^2+1\right) dx$$

Θέτω $x^2 + 1 = u$

Άρα $2xdx = du \Leftrightarrow xdx = \frac{1}{2}du$

Αν x = 1: u=2
Αν x = -1: u=2

$$I_1 = \int_{2}^{2} \ln u \frac{1}{2} du = 0$$

Άρα $I = \int_{-1}^{1} 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Παραγωγίζοντας την σχέση (1)

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{f(x)-x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$$

Δ.2

g'(x)=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)

=2f'(x)$\left[f'(x)-x\right]$-2f(x)

=2f(x)-2f(x)

=0

άρα g(x)=c

Δ.3

$g(x) = c \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = c$

Αν x=0 : $f^2(0) = c \Leftrightarrow 3^2 = c \Leftrightarrow c = 9$

Δηλαδή $f^2(x) - 2xf(x) = 9$

$\left[f(x) - x\right]^2 = x^2 + 9$

Θεωρώ h(x)=f(x) – x

Η h(x)$\neq$0 για κάθε x$\in$R

Η h(x) συνεχής

άρα η h διατηρεί πρόσημο στο R όμως h(0)=3>0

άρα h(x)>0 για κάθε x$\in$R

Τότε : $\left[f(x)-x\right]^2 = x^2+9 \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$ για x$\in$R

Δ.4

1ος τρόπος

Θεωρώ $h(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)dt = \int_{0}^{x+1} f(t)dt - \int_{0}^{x} f(t)dt$

h΄(x)=f(x+1) - f(x)

για κάθε x$\in$R: $x < x+1 \xrightarrow{f\uparrow} f(x) < f(x+1)$

άρα $x < x+1 \xrightarrow{h\uparrow} h(x) < h(x+1)$

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$

$2^{ος}$ τρόπος

θεωρώ $P(x)=\int_0^x f(t)dt$ με $P'(x) = f(x)$

$$P''(x)=f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}}>0$$

Διότι $\sqrt{x^2+9}>\sqrt{x^2}\geq |x|\geq -x$

άρα $\sqrt{x^2+9}+x>0 \Rightarrow f(x)>0$

P συνεχής στα $[x,x+1]$, $[x+1,x+2]$
P παραγωγίσιμη στα (x,x+1) , (x+1, x+2)

άρα για την συνάρτηση P εφαρμόζεται το ΘΜΤ στα διαστήματα $[x,x+1],[x+1,x+2]$ και άρα υπάρχουν $\xi_1\in(x,x+1)$, $\xi_2\in(x+1,x+2)$

τέτοια ώστε $P'(\xi_1)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$

$$P'(\xi_2)=\frac{f(x+2)-f(x+1)}{(x+2)-(x+1)}$$

Δηλαδή $P'(\xi_1)=\int_x^{x+1} f(t)dt$ $\quad P'(\xi_2)=\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

Όμως $\xi_1<\xi_2 \xrightarrow{P'\uparrow} P'(\xi_1)<P'(\xi_2)\Rightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

ΣΧΟΛΙΟ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τα θέματα ήταν σαφώς διατυπωμένα εξέταζαν τους μαθητές σε βασικές διαδικασίες και κάλυπταν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης. Είχαν σαφώς κλιμακούμενη δυσκολία, ένας καλά προετοιμασμένος μαθητής μπορεί να προσεγγίσει το άριστα.

ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ «ΡΟΜΒΟΣ»