

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
16/5/2011**A1.**

Θεωρία σελ. 260 σχολικού βιβλίου θεώρημα Fermat

A2.

Θεωρία σελ. 280 σχολικού βιβλίου ορισμός

A3. $\alpha - \Sigma$ $\beta - \Sigma$ $\gamma - \Lambda$ $\delta - \Lambda$ $\varepsilon - \Sigma$ **ΘΕΜΑ Β****B1**

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| + |\overline{z - 3i}| = 2$$

$$|z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1$$

Άρα ο z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(0, 3)$ και $R = 1$ **B2**

$$|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i} \text{ με } z \neq 3i$$

B3

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} \stackrel{z=x+yi}{=} 2x$$

$$\text{Ισχύει } |z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |w| = \left| z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \right| \leq |z - 3i| + \left| \frac{1}{z - 3i} \right| = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} |w| \leq 2 \\ w \in \mathbb{R} \end{array} \right\} -2 \leq w \leq 2$$

B4

$$|z - w| = |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |z|$$

Γ1.

$$e^x [f'(x) + f''(x) - 1] = f'(x) + xf''(x)$$

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x)$$

$$[e^x f'(x) - e^x]' = [xf''(x)]'$$

άρα

$$e^x f'(x) - e^x = x f'(x) + c \Rightarrow \text{για } x = 0$$

$$c = -1$$

δηλ.

$$e^x f'(x) - e^x = x f'(x) - 1$$

$$(e^x - x) f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad x \in \mathbb{R} \quad (e^x - x > 0)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \ln(e^x - x) + c_1$$

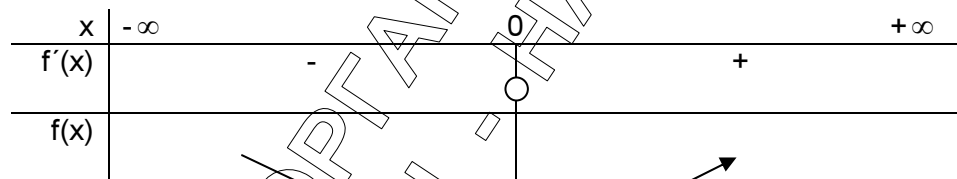
$$f(0) = \ln 1 + c_1 + c_1 = 0$$

$$\text{δηλαδή } f(x) = \ln(e^x - x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ2.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0$$



Ολικό Ελάχιστο $f(0) = 0$

Γ3.

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - e^x x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}$$

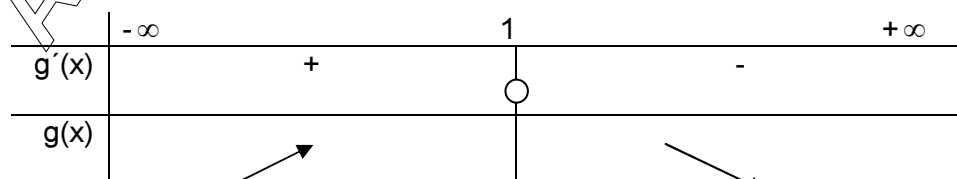
$$\text{θεωρώ } g(x) = e^x(2 - x) - 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = e^x(2 - x) - 1e^x = -e^x x + e^x = e^x(1 - x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$$

$$g'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$$



Ολικό Μέγιστο

Ολικό Μέγιστο $g(1) = e - 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(1-x) - 1]$$

$$\begin{aligned} \text{όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(1-x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{e^{-x}} \quad \begin{matrix} +\infty \\ +\infty \\ = \end{matrix} \quad (\text{DE L'HOPITAL}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x(1-x) - 1) = -\infty$$

Πλήθος ριζών της g

$$A_1 = (-\infty, 1] \xrightarrow[\text{συνεχ}]{g \uparrow} f(A_1) = (-1, e-1]$$

η g παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό

$$A_2 = [1, +\infty) \xrightarrow[\text{συνεχ}]{g \downarrow} f(A_2) = (-\infty, e-1]$$

Η g παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Τελικά η g έχει δύο ρίζες ρ_1 στο $(-\infty, 0)$ και ρ_2 στο $(0, +\infty)$ αντίστοιχα

Άρα η f έχει δύο πιθανά σημεία καμπής

Πρόσημο της g (άρα και της f').

$$\text{για κάθε } x < \rho_1 \xrightarrow{g \uparrow} g(x) < g(\rho_1) \Rightarrow g(x) < 0$$

Για κάθε

$$\rho_1 < x < \rho_2 \text{ η g διατηρεί πρόσημο και αφού } g(1) = e - 1 > 0 \text{ άρα } g(x) > 0$$

$$\text{για κάθε } x > \rho_2 \xrightarrow{g \downarrow} g(x) < g(\rho_2) \Rightarrow g(x) < 0$$

άρα η f έχει 2 σημεία καμπής τα $x = \rho_1, x = \rho_2$

Γ4.

$$\text{Θεωρώ } h(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$$

$$h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \sin x > 0 \text{ για κάθε } x$$

$$\text{στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα } h \uparrow \text{ και «1-1» και άρα έχει το πολύ μία ρίζα στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Υπαρξη ρίζας της h

$$h(0) = \ln 1 - \sin 0 = -1 < 0$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Όμως } \frac{\pi}{2} > 1 > 0 \xrightarrow{f \uparrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(1) \Rightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > \ln(e-1) > 0$$

Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα Bolzano για την h στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και άρα η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα η h έχει ακριβώς 1 ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

$$I = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

$$\text{Θέτω } x+t=u \Leftrightarrow t=-x+u$$

$$\text{Άρα } dt = du$$

$$\text{Αν } t = -x \text{ τότε } u = 0$$

$$\text{Αν } t = 0 \text{ τότε } u = x$$

$$I = \int_x^0 \frac{e^{-2x+2u}}{g(u)} du = -e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Άρα } \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = -e^{-2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Ομοίως } g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

- Η f είναι συνεχής, ή e^{2x} είναι συνεχής, άρα η $\frac{e^{2x}}{f(x)}$ είναι συνεχής (Διότι $f(x) > 0$)

- Ομοίως η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = e^{2x} \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x) \cdot f(x) = e^{2x} \quad (2)$$

$$(2) - (1) : f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x) = 0$$

$$\frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

$$\text{Όμως } f(0) = g(0) = 1$$

$$\text{Αν } x = 0 : \frac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Δηλαδή } f(x) = g(x)$$

Δ2

$$f'(x) \cdot g(x) = e^{2x}$$

$$f(x) \cdot f'(x) = e^{2x}$$

$$2f(x) \cdot f'(x) = 2e^{2x}$$

$$(f^2(x))' = (e^{2x})'$$

$$f^2(x) = e^{2x} + c$$

$$\text{Αν } x=0: f^2(0) = e^0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Αν } x=0: f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = e^x = g(x)}$$

Δ3

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-e^{\frac{1}{x}} \right)^{u = \frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (-e^u) = -\infty$$

Δ4

$$E = \int_0^1 \left| \int_1^x f(t^2) dt \right| dx$$

Όμως

$$f(t^2) > 0 \text{ άρα } \eta \int_1^x f(t^2) dt > 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και } \int_1^x f(t^2) dt < 0 \text{ για κάθε } x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= - \int_0^1 \int_1^x f(t^2) dt = - \int_0^1 \left[x \int_1^x f(t^2) dt \right]_0^1 + \int_0^1 x f(x^2) dx = \\ &= \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

Επιμέλεια απαντήσεων
Ομάδα Μαθηματικών Εκπαιδευτικού Οργανισμού «ΡΟΜΒΟΣ»