ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία σελίδες 334 – 335 του σχολικού βιβλίου .
Α2. Θεωρία σελίδα 246 του σχολικού βιβλίου .
Α3. Θεωρία σελίδα 222 του σχολικού βιβλίου .
Α4. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1.

$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$

$|z-2|^2+|z-2|-2=0$

$|z-2|=\omega\geq 0$

$\omega^2+\omega-2=0$

$\Delta=9 \quad \omega=\dfrac{-1\pm 3}{2}$. Άρα $\omega_1=1$ ή $\omega_2=-2(\text{άτοπο})$

Άρα $|z-2|=1\Rightarrow z\in$ κύκλο με $K(2,0)$, $\rho=1$.

$|z|=|z-2+2|\leq|z-2|+2=3$.

Άρα $|z|\leq 3$.

Β2.

Έστω $z_1=x+yi\Rightarrow z_2=x-yi$.

$|\text{Im}(z_1)-\text{Im}(z_2)|=2$

$|y+y|=2$

$|2y|=2$

$|y|=1\Rightarrow y=\pm 1$

Άρα $|z_1 - 2| = 1$.

$$|x + i - 2| = 1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 1} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = 1$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$x = 2$$

Από Vieta έχουμε $\begin{matrix} z_1 + z_2 = -\beta \\ z_1 \cdot z_2 = \gamma \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4 \\ x^2 + y^2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5 \end{matrix}$

B3.

__1ος Τρόπος__

$$\nu^3 + \alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\nu^3 = -\alpha_2 \nu^2 - \alpha_1 \nu - \alpha_0 \Rightarrow$$
$$\left.\begin{matrix} |\nu|^3 = |\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0| \le |\alpha_2|\,|\nu|^2 + |\alpha_1|\,|\nu| + |\alpha_0| \\ 1 \le |\alpha_0| \le 3 \\ \text{Και αφού } 1 \le |\alpha_1| \le 3 \\ 1 \le |\alpha_2| \le 3 \end{matrix}\right| \Rightarrow |\nu|^3 \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 \quad (1)$$

Έστω $|\nu| \ge 4$ τότε :

$$|\nu|^3 \ge 4|\nu|^2$$
$$|\nu|^3 \ge 3|\nu|^2 + |\nu|^2$$
$$|\nu|^3 \ge 3|\nu|^2 + |\nu||\nu|$$
$$|\nu|^3 \ge 3|\nu|^2 + 4|\nu|$$
$$|\nu|^3 \ge 3|\nu|^2 + 3|\nu| + |\nu|$$
$$|\nu|^3 \ge 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 4 > 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 \quad \text{Άτοπο από } (1).$$

Άρα $|\nu| < 4$.

__2ος Τρόπος__

$$|\nu|^3 = |\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0| \le |\alpha_2||\nu|^2 + |\alpha_1||\nu| + |\alpha_0| \le 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3$$

$$|\nu|^3 \le 3(|\nu|^2 + |\nu| + 1) \Rightarrow |\nu|^3 - 1 \le 3(|\nu|^2 + |\nu| + 1) - 1 \Rightarrow$$

Άρα $(|\nu| - 1)(|\nu|^2 + |\nu| + 1) \le 3(|\nu|^2 + |\nu| + 1) - 1$

$$|\nu| - 1 \le 3 - \frac{1}{|\nu|^2 + \nu + 1} < 3 \Rightarrow |\nu| - 1 < 3 \Rightarrow |\nu| < 4$$

Θέμα Γ

Γ1.

$$\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x \Leftrightarrow 2\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \left(\left[f(x)+x\right]^2\right)'=\left(x^2\right)'$$

Άρα $\left[f(x)+x\right]^2=x^2+c$.

Για $x=0$ έχουμε $\left[f(0)+0\right]^2=0^2+c \Leftrightarrow c=1$.

Δηλαδή $\left[f(x)+x\right]^2=x^2+1$.

Θεωρώ $h(x)=f(x)+x$.

Τότε $h^2(x)=x^2+1 \quad x\in R$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in R : h(x_0)=0$.

Τότε $h^2(x_0)=x_0^2+1$ άτοπο .

Άρα h συνεχής στο R .

$h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Δηλαδή η h διατηρεί πρόσημο στο R

Όμως $h(0)=f(0)+0=1>0$.

Άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

$h(x)=\sqrt{x^2+1}$ διότι h συνεχής και θετική .

Άρα $f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \quad x\in R$.

Γ2.

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0 \text{ για κάθε } x\in R.$$

(διότι $x<\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$).

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο R . και 1-1

Τότε $f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0) \Leftrightarrow g(x)=0$

Θα βρω το πλήθος ριζών της εξίσωσης $g(x)=0$.

$$g(x) \text{ όπου } \begin{array}{l} g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \;\; x \in R \\ g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1) \\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array} \right. \\ g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) > 0 \end{array}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

T.M. $g(-1) = -1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

T.E. $g(0) = -1$.

.

Θα βρω τα όρια της g στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

- Αν $x \in (-\infty, -1) : g \uparrow$ με $\Sigma T_g = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

Η g δεν παίρνει την τιμή μηδέν άρα δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό .

- Αν $x \in [-1, 0] : g \downarrow$ με $\Sigma Tg = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

Η g δεν παίρνει την τιμή μηδέν άρα δεν έχει ρίζα στο διάστημα αυτό .

- Αν $x \in (0, +\infty) : g \uparrow$ με $\Sigma T_g = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Η g παίρνει την τιμή μηδέν άρα έχει ρίζα στο διάστημα αυτό που λόγω της μονοτονίας είναι μοναδική .

Γ3.

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x_0$$

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt + f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\eta\mu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x_0 \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt + f(x_0)\eta\mu x_0 = 0$$

Θεωρώ $P(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt\ \eta\mu x$.

P συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

P παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$P(0) = 0$

$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Άρα εφαρμόζεται στο Θ.Rolle για την P στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και άρα υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Τέτοιο ώστε $P'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt + f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0 = 0$.

Θέμα Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h}\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-5h) - f(1)}{h} \overset{5h=u}{==} \frac{1}{5}\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u) - f(1)}{u} = \frac{1}{5}\cdot f'(1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h) - f(1)}{h} \overset{-h=\omega}{==} -\lim_{\omega\to 0}\frac{f(1+w) - f(1)}{\omega} = -f'(1)$$

Άρα $\frac{1}{5}f'(1) + f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) + 5f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = 0$

$x > 1 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x) > f'(1) = 0 \rightarrow f \uparrow$ στο $(1, +\infty)$.

$x < 1 \xrightarrow{f'\uparrow} f'(x) < f'(1) = 0 \rightarrow f \downarrow$ στο $(1, +\infty)$.

Άρα στο $x_0 = 1$ η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1$.

Δ2.

Η συνάρτηση $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής στο $(1,+\infty)$ άρα η g παραγωγίσιμη με

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1} \\ \text{Για } x>1 \Rightarrow f(x)\geq f(1)=1>0 \end{array}\right| \Rightarrow g'(x)>0 \ ,\ x\in(1,+\infty) \text{ άρα } g\uparrow \text{ στο } (1,+\infty).$$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \ .$$

Θεωρώ την $\Phi(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du$.

Η g συνεχής στο $(1,+\infty)$

$$x\,,\,x+1\in(1,+\infty)\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x>1 \\ x>0 \end{array}\right| \text{Άρα } x>1$$

Επομένως, Φ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $\Phi'(x)=g(x+1)-g(x)\xrightarrow{g\uparrow}\Phi'(x)>0$. Άρα $\Phi\uparrow$ στο $(1,+\infty)$.

Αφού $8x^2+6$, $8x^2+5$, $2x^4+5$, $2x^4+6$ ανήκουν στο $(1,+\infty)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχω να λύσω την

$$\begin{aligned} &\Phi(8x^2+5)>\Phi(2x\ +5)\Rightarrow \\ &8x^2+5>2x^4+5 \\ &2x^4-8x^2<0 \\ &2x^2(x^2-4)<0 \end{aligned}$$

x		-2		0		2	
$2x^2$	+		+	0	+		+
x^2-4	+	0	-		-	0	+
ΓΙΝΟΜΕΝΟ	+	0	-	0	-	0	+

Άρα $x\in(-2,0)\cup(0,2)$.

Δ3.

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$$

$$[1,x]\overset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow} f'(\xi)=\frac{f(x)-1}{x-1}$$

$$f(x)-1=f'(\xi)(x-1)$$

Άρα $g''(x)=\dfrac{(x-1)\left(f'(x)-f'(\xi)\right)}{(x-1)^2}$

$\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi)<f'(x)$ άρα $g''(x)>0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$. Άρα η g είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$..

Για $x=\alpha$ προφανής ρίζα .

Για $x\neq\alpha$.

$$h(x)=(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$$

$$h'(x)=(\alpha-1)\frac{f(x)-1}{x-1}-(f(\alpha)-1)$$

$$h'(x)=(\alpha-1)\left(\frac{f(x)-1}{x-1}-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right)$$

$h'(x)=(\alpha-1)\left(g'(x)-g'(\alpha)\right)$. Όμως η g είναι κυρτή, άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως, $g'(x)-g'(\alpha)\neq 0$.

Άρα $h'(x)\neq 0$. Άρα το πολύ μια ρίζα.

<u>ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

Το Β3 ερώτημα είναι αρκετά δύσκολο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι το άριστα θα είναι το 92. Όμως και τα υπόλοιπα ερωτήματα ήταν πολύ απαιτητικά και χρειαζόταν πολύ μεγάλη εμπειρία σε σύνθετα θέματα .

Επιμέλεια Θεμάτων

Ομάδα μαθηματικών του Εκπαιδευτικού Οργανισμού << ΡΟΜΒΟΣ>> .