ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 02 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου.

Α4. α) - Λ , β) - Σ , γ) – Σ , δ) – Σ , ε) - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2\left(x^2+y^2\right)+2xi-4-2i=0$

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-2=0 \\ 2x-2=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \\ x=1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{array}\right|$$

Β2. $w=3\left(\dfrac{z_1}{\overline{z}_1}\right)^{39}=3\left(\dfrac{z_1^2}{|z_1|^2}\right)^{39}=3\left(\dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^{39}=3\,\dfrac{(2i)^{39}}{2^{39}}=3\cdot\dfrac{2^{39}\cdot i^{39}}{2^{39}}=3i^{4\cdot 9+3}=3i^3=-3i$

Β3. $|u+w|=|4z_1-z_2-i|$

$|w-3i|=|4+4i-1+i-i|$

$|w-3i|=|3+4i|$

$|w-3i|=5$ **,** άρα κύκλος με $K(0,3)$, $\rho=5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in R$

$$h'(x) = x - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$, για κάθε $x \in R$

Άρα, η h κοίλη στο R.

Γ2. $e^{h(2h'(x))} < \dfrac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{(2h'(x))} < \ln \dfrac{e}{e+1}$

$h(2h'(x)) < \ln e - \ln(e+1)$

$h(2h'(x)) < h(1) \underset{h'(x)>0}{\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \dfrac{1}{2}$

$h'(x) < h'(0) \overset{h'\downarrow}{\Rightarrow} x > 0$

Γ3. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \ln(e^x + 1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln e^x - \ln(e^x + 1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Όμως, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{==}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

Άρα, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ln 1 = 0$.

Άρα, οριζόντια ασύμπτωτη $y = 0$ στο $+\infty$.

$h(x) - x = -\ln(e^x + 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[h(x) - x\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[-\ln(e^x + 1)\right] = 0$

Άρα, πλάγια ασύμπτωτη $y = x$ στο $-\infty$.

Γ4. $\varphi(x)=e^{x}\left[h(x)+\ln 2\right]$

Θα βρω που η C_{φ} τέμνει τον άξονα $x'x$.

$\cdot\ \varphi(x)=0 \Rightarrow h(x)+\ln 2=0 \Leftrightarrow x-\ln\left(e^{x}+1\right)=-\ln 2 \Leftrightarrow \ln\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\ln\dfrac{1}{2}$

Επειδή η $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή $1-1$ έχουμε :

$\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^{x}=e^{x}+1 \Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$

$\cdot\ E=\int_{0}^{1}\left|\varphi(x)\right|dx$

$\cdot\ \varphi(x)>0 \Leftrightarrow h(x)+\ln 2>0 \Leftrightarrow x-\ln\left(e^{x}+1\right)+\ln 2>0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{2e^{x}}{e^{x}+1}>0 \Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$

$\cdot\ E=\int_{0}^{1}\varphi(x)dx=\int_{0}^{1}e^{x}\left[x-\ln\left(e^{x}+1\right)+\ln 2\right]dx=\int_{0}^{1}e^{x}\cdot x\cdot dx-\int_{0}^{1}e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)dx+\int_{0}^{1}\ln 2\cdot e^{x}dx$

$\cdot\ I_{1}=\int_{0}^{1}e^{x}dx=\left[e^{x}\cdot x\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{x}dx=\left[e^{x}\cdot x\right]_{0}^{1}-\left[e^{x}\right]_{0}^{1}=e-e+1=1$

$\cdot\ I_{2}=\int_{0}^{1}e^{x}\ln\left(e^{x}+1\right)dx$ Θέτω $e^{x}+1=u \Leftrightarrow e^{x}=u-1$.

Άρα, $e^{x}dx=du$.

Αν $x=1: u=e+1$.

Αν $x=0: u=2$.

$\cdot\ I_{2}=\int_{2}^{e+1}\ln u\,du=\left[u\ln u-u\right]_{2}^{e+1}=(e+1)\ln(e+1)-(e+1)-2\ln 2+2$

$\cdot\ I_{3}=\int_{0}^{1}\ln 2e^{x}dx=\ln 2\left[e^{x}\right]_{0}^{1}=\ln 2\,(e-1)$

$E=1-(e+1)\ln(e+1)+(e+1)+2\ln 2-2+\ln 2\cdot(e-1)=-(e+1)\ln(e+1)+\ln 2\,(e+1)\ +e=$

$=(e+1)\ln\dfrac{2}{e+1}\ +e$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

$f(0)=1$

Άρα f συνεχής στο $x_0=0$

$$f'(x)=\frac{e^x x-1(e^x-1)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$$

Θεωρώ $p(x)=e^x(x-1)+1 \;\; x\in R$

$$p'(x)=e^x(x-1)+1\cdot e^x=e^x x$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
p΄	-	0	+
p	↘		↗

Ολικό Ελάχιστο p(0) = 0.

Άρα $p(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$ [το ίσον στο x_0=0]

Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής στο x_0=0 η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ2.

α) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x-1}{x}=0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και συνεχής.

Άρα $R_f=(0,+\infty)$.

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Επειδή $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

Άρα, $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Όμως η f κυρτή άρα f΄ γνησίως αύξουσα άρα $x_0=0$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=\frac{1}{2}$.

β) $f(x(t))=y(t)$

$f'(x(t))\cdot x'(t)=y'(t)$

Για $t=t_0$ έχουμε $f'(x(t_0))x'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)$

Όμως, $x'(t_0)>0$. Άρα, $f'(x(t_0))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x(t_0))=f'(0)$

Επειδή f' είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή 1-1, $x(t_0)=0$ και επειδή $f(0)=1$, το σημείο είναι $M(0,1)$.

Δ3. $g(x)=[xf(x)+1-e]^2(x-2)^2=(e^x-e)^2(x-2)^2$

$g'(x)=2(e^x-e)e^x(x-2)^2+2(e^x-e)^2(x-2)=2(e^x-e)(x-2)[e^x(x-2)+(e^x-e)]=$
$=2(e^x-e)(x-2)[e^x\cdot x-e^x-e]$, $x>0$

$\Phi(x)=e^x\cdot x-e^x-e$

$\varphi'(x)=e^x\cdot x>0$. Άρα, η φ είναι γνησίως αύξουσα.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(1)=-e<0\\ \varphi(2)=2e^2-e^2-e=e^2-e>0\end{array}\right|\overset{\text{Θ.Β.}}{\Rightarrow} \text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0\in(1,2):\varphi(x_0)=0$$

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή 1- 1, το x_0 είναι μοναδικό.

Για κάθε $x<x_0\overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow}\varphi(x)<\varphi(x_0)\Leftrightarrow\varphi(x)<0$.

x	$-\infty$	1		x_0		2		$+\infty$
$e^x - e$	-	0	+		+		+	
$x-2$	-		-		-	0	+	
$e^x x - e^x - e$	-		-	0	+		+	
g'	-	0	+	0	-		+	
g	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
		Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Για κάθε $x > x_0 \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Αντωνιάδης Ανδρέας,

Δριμιλής Βασίλης,

Ξηνταβελώνης Πέτρος,

Παπαμικρούλης Δημήτρης,

Τσαρπαλής Γιάννης,

Τσόγιας Δημήτρης