

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**20 ΜΑΪΟΥ 2015**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1) Σχόλιο βιβλίο σελ. 31**

**A2) Σχόλιο βιβλίο σελ. 22**

**A3) Σχόλιο βιβλίο σελ. 86**

**A4) Λ. Σ. Λ. Λ. Σ.**

**ΘΕΜΑ Β**

$$\mathbf{B1)} \quad (3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \\ 8x^2-6x+1=0 \end{cases}$$

$$8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \Delta=36-32=4 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{16} \begin{cases} x=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \\ x=\frac{4}{16}=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Επειδή  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$  θα έχουμε  $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

$$\text{Άρα } P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{B2)} \quad P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Διότι } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

$$P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{B3)} \quad P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) =$$

$$= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

**B4)** Έχουμε  $P(B) = \frac{5}{12}$

$$9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 9 + 72 = 81 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 9}{18} \begin{cases} x = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ Άρα } P(\Gamma) = \frac{2}{3}$$

Έστω ότι B, Γ ξένα δηλ.  $(B \cap \Gamma = \emptyset)$

Τότε  $P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$  άτοπο. Άρα δεν είναι ξένα

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1)**

$$f_1\% = 10 \Rightarrow f_1 = 0,1$$

$$f_5\% = 30 \Rightarrow f_5 = 0,3$$

$$a_3 = 108 \Rightarrow 360f_3 = 108 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} \Rightarrow f_3 = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\sum_{i=1}^5 f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (1)$$

$$x = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 14 \Leftrightarrow 9f_1 + 11f_2 + 13f_3 + 15f_4 + 17f_5 = 14$$

$$0,9 + 11f_2 + 3,9 + 15f_4 + 5,1 = 14$$

$$\left. \begin{aligned} 11f_2 + 15f_4 &= 4,1 \\ (1) \Rightarrow 11f_2 + 11f_4 &= 3,3 \end{aligned} \right\} (-)$$

$$4f_4 = 0,8 \text{ άρα } f_4 = 0,2 \Rightarrow f_2 = 0,1$$

$$f_4\% = 20\%, f_2\% = 10\%$$

Γ2) Ο πίνακας κατανομής σχετικών συχνοτήτων είναι

| κλάσεις | $x_i$ | $f_i \%$ | $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ |
|---------|-------|----------|-------------------------|
| [8,10)  | 9     | 10       | 2,5                     |
| [10,12) | 11    | 10       | 0,9                     |
| [12,14) | 13    | 30       | 0,3                     |
| [14,16) | 15    | 20       | 0,2                     |
| [16,18) | 17    | 30       | 2,7                     |
| σύνολα  |       | 100      | 6,6                     |

Η διασπορά του δείγματος είναι

$$s^2 = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 f_i = 6,6$$

οπότε η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$$

οπότε ο συντελεστής μεταβολή του δείγματος είναι

$$CV\% = \frac{s}{\bar{x}} 100\% = \frac{2,57}{14} 100\% \simeq 18\%$$

Αφού  $CV\% > 10\%$  το δείγμα είναι ανομοιογενές

Γ3) Έχουμε ,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^4 x_i v_i + x_5 v_5 \right] \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i + \frac{1}{v} x_5 v_5 \Leftrightarrow \frac{1}{v} 1780 + x_5 f_5 \\ \Leftrightarrow 14 &= \frac{1}{v} 1780 + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow \frac{1780}{v} = 8,9 \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8,9} = 200 \end{aligned}$$

Γ4) Έχουμε  $\beta_i = \frac{1}{s_a} a_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$  για  $i = 1, \dots, 5$  οπότε από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0 \text{ και } S_{\beta} = \frac{1}{s_a} s_a = 1$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Αφού Α γωνία ορθή είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο άρα ΔΒ διάμετρος κύκλου.

ΑΔΒ ορθογώνιο τρίγωνο. Άρα

$$\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$$

$$10^2 = x^2 + A\Delta^2$$

$$A\Delta^2 = 100 - x^2$$

$$A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$$

$$\text{Πρέπει } A\Delta > 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-10, 10)$$

Όμως  $x > 0$  λόγω του ότι  $AB > 0$ . Άρα  $0 < x < 10$

$$\Delta 2) f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}, x \in (0, 10)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' \cdot \sqrt{100 - x^2} + x \cdot (\sqrt{100 - x^2})' = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \\ &= \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{\sqrt{100 - x^2}^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{50}$$

Όμως  $x > 0$  άρα  $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

### ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ

|    |           |   |             |    |           |
|----|-----------|---|-------------|----|-----------|
| x  | $-\infty$ | 0 | $5\sqrt{2}$ | 10 | $+\infty$ |
| f' |           |   | +           | -  |           |
| f  |           |   | ↗           | ↘  |           |

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για  $x = 5\sqrt{2}$

Η πλευρά  $A\Delta = \sqrt{100 - x^2}$ . Για  $x = 5\sqrt{2}$  έχουμε  $A\Delta = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Άρα  $A\Delta = AB$  άρα  $AB\Gamma\Delta$  τετράγωνο

$$\Delta 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{98} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \right) = \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

$$\begin{aligned}
\Delta 4) \text{ Είναι } A - B \subseteq A \text{ άρα } 0 < P(A - B) \leq P(A) \leq 1 \stackrel{f \in (0,1]}{\Leftrightarrow} f[P(A - B)] \leq f[P(A)] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow P(A - B) \sqrt{100 - (P(A - B))^2} \leq P(A) \sqrt{100 - (P(A))^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - (P(A))^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - (P(A - B))^2}} \quad (I)
\end{aligned}$$

Όμως  $0 < P(A - B) \leq 1$  (1) και  $0 \leq P(A) \leq 1$  (2)

$$\begin{aligned}
0 \leq P(A) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq P^2(A) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -P^2(A) \leq 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 99 \leq 100 - P^2(A) \leq 100 \Leftrightarrow \sqrt{99} \leq \sqrt{100 - P^2(A)} \leq 10 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{99}} \geq \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \geq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{\sqrt{99}}{99} \quad (3)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη (1) και (3) έχουμε

$$0 < \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{\sqrt{99}}{99} < 1$$

Και  $0 < P(A - B) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < P^2(A - B) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -P^2(A - B) < 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 99 \leq 100 - P^2(A - B) < 100 \Leftrightarrow \sqrt{99} \leq \sqrt{100 - P^2(A - B)} < 10 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{99}} \geq \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \leq \frac{\sqrt{99}}{99} \quad (4)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη (2) και (4) έχουμε

$$0 \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \leq \frac{\sqrt{99}}{99} < 1$$

$$\text{Έτσι λοιπόν (I)} \stackrel{f \in (0,1]}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - (P(A))^2}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - (P(A - B))^2}}\right)$$

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:**

**ΟΜΑΔΑ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΣΧΟΛΙΟ:**

- Τα θέματα ήταν συνολικά δύσκολα και κάλυπταν σχεδόν όλη την ύλη

**ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ:** • Φλέμιγκ 40, τηλ. 2109911569 • Κύπρου 51, τηλ. 2109941471, 2109935566 • Γερουλάνου 103, τηλ. 2109911067

**ΗΛΙΟΥΠΟΛΗ:** • Ναυαρίνου 12, τηλ. 2109944396, • Πρωτόπαππα & Ρόδου 2, τηλ. 2109955210 - 211

**ΓΛΥΦΑΔΑ:** Λ. Βουλιαγμένης 147 & Πραξιτέλους 2, τηλ. 2109680008

**email :** [support@romvos.edu.gr](mailto:support@romvos.edu.gr)