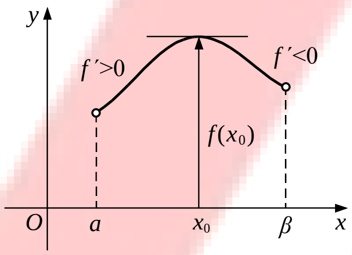
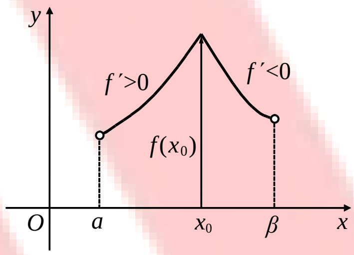
ΘΕΜΑ Α

Α1. Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$.(1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$ (2)





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. Δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν,
- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

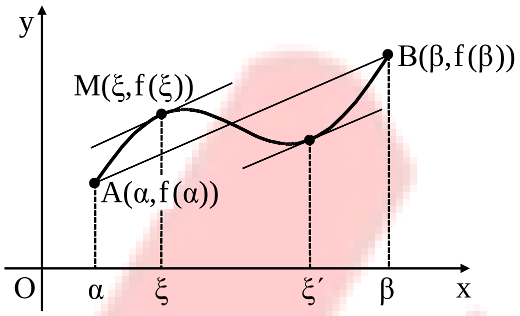
Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Α3.
Αν μια συνάρτηση f είναι:
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>

Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει **ένα, τουλάχιστον**, σημείο $M(\xi,f(\xi))$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Μ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.



Α4. (α) Λάθος
(β) Σωστό
(γ) Λάθος
(δ) Σωστό
(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο Ο(0, 0).

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = \frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$		$x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$		$\frown$

άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_1], [x_2, +\infty)$, κυρτή στο $[x_1, x_2]$ και σημεία καμπής στα σημεία
$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

B3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης:

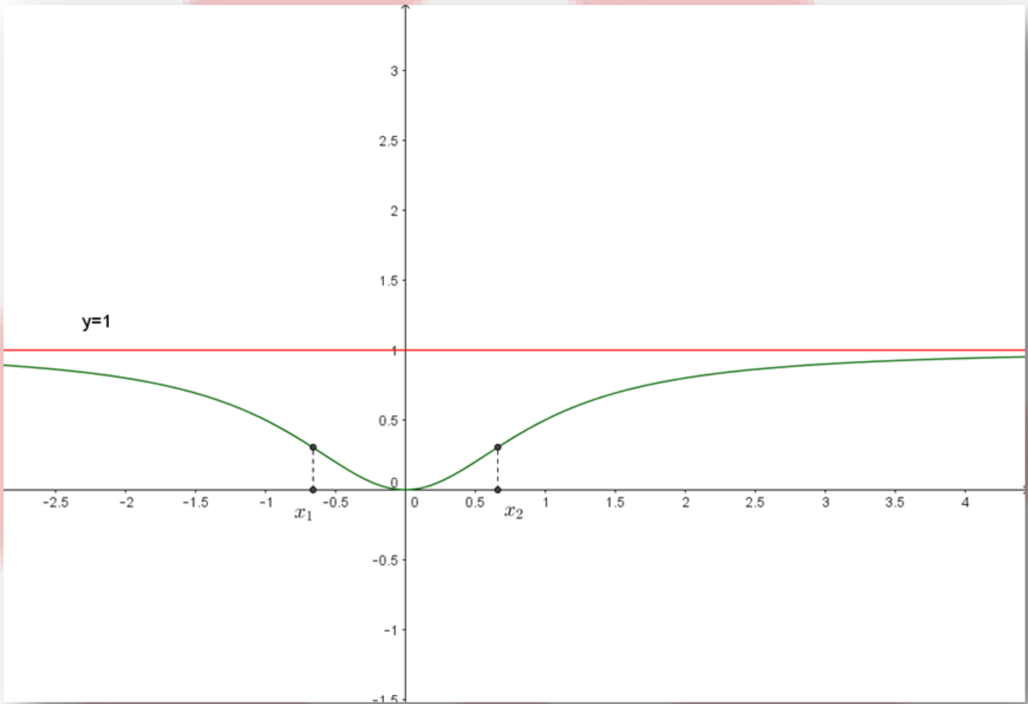
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

και όμοια

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=1 στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

B4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή ισχύει $\ln x \le x - 1$ για $x > 0$ (εφαρμογή του βιβλίου), θέτω όπου x το $e^{x^2} > 0$.
Άρα, έχουμε

$$x^2 \le e^{x^2} - 1.$$

Η ισότητα ισχύει για $x = 0$.
Άρα, η εξίσωση

$$e^{x^2} - x^2 - 1 = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα την } x = 0.$$

Γ2. Είναι

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2} \Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \overset{e^{x^2}-x^2-1\geq 0}{\Leftrightarrow} |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε ότι

$$e^{x^2}-x^2-1 \neq 0 \text{, για κάθε } x \in (-\infty\ ,0)\cup(0\ ,+\infty).$$

Άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty\ ,0)$ και $(0\ ,+\infty)$.

Άρα, έχουμε τέσσερις συναρτήσεις.

$$f_1(x)=e^{x^2}-x^2-1 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f_2(x)=-e^{x^2}+x^2+1 \text{, για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f_3(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,\ x<0 \\ -e^{x^2}+x^2+1 & ,\ x\geq 0 \end{cases}$$

$$f_4(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1 & ,\ x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1 & ,\ x\geq 0 \end{cases}$$

Γ3. Είναι $f'(x)=2xe^{x^2}-2x$, $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2\cdot e^{x^2}>0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Προφανής λύση είναι η $x=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x+3)-f(x),\ D_g=\mathbb{R}$$

Είναι

$$g'(x)=f'(x+3)-f'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ακόμη

$x+3>x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x+3)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για

$$x>0 \Leftrightarrow |\eta\mu x|<x \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(|\eta\mu x|)<g(x) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Άρα μοναδική λύση η $x=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x\cdot g(x)$ κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ως παραγωγίσιμη. Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Έτσι, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\eta\mu x\ g(x)\right]=\eta\mu 0\cdot 1=0$. Άρα, $f(0)=0$.

Έχουμε $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow\int_0^{\pi} f(x)\,\eta\mu x\,dx+\int_0^{\pi} f''(x)\,\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\pi} f(x)\,\eta\mu x\,dx+\left[f'(x)\cdot\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\pi} f(x)\,\eta\mu x\,dx+f'(\pi)\cdot\eta\mu\pi-f'(0)\,\eta\mu(0)-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)(-\eta\mu x)\,dx=\pi.$$

$$-f(\pi)\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0=\pi\Leftrightarrow f(\pi)=\pi\ (1)$$

Επιπλέον, έχουμε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot g(x)=1\cdot 1=1.$$

Άρα, $f'(0)=1$.

Δ2.

α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα στο x_0. Επειδή $D_f=\mathbb{R}$ το x_0 εσωτερικό.

Άρα, από θεώρημα Fermat $f'(x_0)=0$.

$$f'(x)\cdot e^{f(x)}+1=f'(x)\cdot f'(f(x))+e^{x}\ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα,

$$f'(x_0)\cdot e^{f(x_0)}+1=f'(x_0)\cdot f'(f(x_0))+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0.$$

Όμως, $f'(0)=1\neq 0$. Άτοπο. Άρα, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Έχουμε, $f'(x)\neq 0$ και $f'(x)$ συνεχής, άρα θα διατηρεί πρόσημο.

Όμως $f'(0)=1>0$. Άρα, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.. Άρα, $f'(x)>0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η $f\uparrow$.

Δ3. Από συνέχεια της f και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}-1\le\eta\mu x\le 1\\-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}-2\le\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le 2\ \text{ και επειδή } f(x)>0 \text{ κοντά στο } +\infty$$

$$\frac{-2}{f(x)} \le \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \frac{2}{f(x)}$$

Άρα από Κ.Π $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

Δ4.Θέτουμε $\ln x = u$ άρα $\frac{1}{x}dx = du$ και για x=1 το u=0 και για x=e^{π} το u=π άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$0 < \int_0^{\pi} f(u)du < \pi^2 \ (3)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\pi]$ έχουμε:

$$f(0) \le f(u) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(u) \le \pi \text{ και } f(u) - \pi \le 0 \text{ συνεχής όχι παντού μηδεν στο } [0,\pi] \Rightarrow$$
$$\int_0^{\pi} 0du < \int_0^{\pi} f(u)du < \int_0^{\pi} \pi du \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(u)du < \pi^2$$

Άρα η σχέση (3) ισχύει

ΣΧΟΛΙΑ

Τα θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας. Το θέμα Β είναι άσκηση του σχολικού βιβλίου. Οι μαθητές θα δυσκολευτούν στο Γ2 και στο Γ4. Γενικώς, τα θέματα ήταν προσιτά για τους καλά διαβασμένους μαθητές. Κάλυπταν μεγάλο μέρος της ύλης και η διατύπωσή τους ήταν σαφής.

Επιμέλεια Απαντήσεων

Η ομάδα Μαθηματικών
των Φροντιστηρίων ΡΟΜΒΟΣ